# §1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

## 1.1 ĐỊNH NGHĨA

Cho $E$ và $F$ là hai không gian véc tơ trên cùng một trường $K$. *Một ánh xạ $f$ từ $E$ vào $F$ được gọi là tuyến tính nếu nó thoả mãn điều kiện sau:*

$L_1$: Với mọi $u, v \in E$ ta có $f(u+v) = f(u) + f(v)$;

$L_2$: Với mọi $\alpha \in K$, với mọi $u \in E$ ta có: $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Từ $L_1$ ta suy ra: với $0 \in E$ ta có $f(0) = 0, (0 \in F)$

Thật vậy: $f(u) = f(u+0) = f(u) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$

Ta có thể viết gộp hai điều kiện $L_1$, $L_2$ thành:

*Ánh xạ $f : E \to F$ là tuyến tính $\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in E, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ ta có:*

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

Một cách tổng quát hơn, ta có:

$$\forall v_i \in E, \forall \alpha_i \in K, f(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Điều kiện trên nói lên rằng ánh xạ tuyến tính *bảo toàn tổ hợp tuyến tính của các véc tơ.*

***Ví dụ 1:*** Cho ánh xạ $f : R^2 \to R$ xác định bởi

$f(x, y) = 3x - 2y; \forall (x, y) \in R^2$. Hãy chứng tỏ rằng ánh xạ $f$ là tuyến tính.

Lấy $u, v \in R^2$, $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ và $\alpha \in R$ ta có:

$f(u+v) = f(a+c, b+d) = 3(a+c) - 2(b+d) = (3a - 2b) + (3c - 2d) = f(u) + f(v).$

$f(\alpha u) = f(\alpha a, \alpha b) = 3\alpha a - 2\alpha b = \alpha(3a - 2b) = \alpha f(u)$

Cả hai điều kiện $L_1$, $L_2$ đều thoả mãn, vậy ánh xạ $f$ là tuyến tính.

***Ví dụ 2:*** Xét không gian $P$ các đa thức có bậc không vượt quá $n$. Cho ánh xạ $f : P \to P$ xác định bởi $f(v) = v'$ (đạo hàm của $v$), với $v \in P$. Ta thấy rằng ánh xạ $f$ là tuyến tính.

Với $u, v \in P$ ta có $f(u+v) = (u+v)' = u' + v' = f(u) + f(v)$.

Với $\alpha \in R, f(\alpha u) = (\alpha u)' = \alpha u' = \alpha f(u)$.

Cả hai điều kiện $L_1$, $L_2$ đều thoả mãn.

## 1.2 NHÂN VÀ ẢNH CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Cho $E$ và $F$ là hai không gian véc tơ trên một trường $K$, $f$ là một ánh xạ tuyến tính từ $E$ vào $F$.

**Định nghĩa 1.** Ta gọi ***nhân*** của ánh xạ $f$ là tập hợp các véc tơ $v$ của $E$ sao cho $f(v) = 0$. Ta ký hiệu nhân của $f$ là $\ker f$.

Như vậy: $\ker f = \{v, v \in E : f(v) = 0\}$

Tập hợp $\ker f$ là một không gian con của $E$. Thật vậy, tập $\ker f$ không rỗng vì ít nhất nó cũng chứa phần tử không $f(0) = 0$; hơn nữa nếu $u, v \in \ker f$, tức là $f(u) = 0, f(v) = 0$, do $f$ là tuyến tính nên $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0$, từ đó suy ra $u + v \in \ker f$.

***Ví dụ:*** Xét không gian $V$ các véc tơ hình học. Cho trước một véc tơ $u \in V$, với mỗi một véc tơ $v \in V$ ta xét ánh xạ $f : V \to R$ xác định bởi $f(v) = u.v$ (tích vô hướng của hai véc tơ u và v). Chứng tỏ rằng $f$ là ánh xạ tuyến tính và tìm $\ker f$.

Theo tính chất của tích vô hướng ta có:

$$f(v_1 + v_2) = u(v_1 + v_2) = uv_1 + uv_2 = f(v_1) + f(v_2);$$

$$f(\alpha v) = u(\alpha v) = \alpha(uv) = \alpha f(v)$$

Vậy $f$ là ánh xạ tuyến tính. Bây giờ ta đi tìm nhân của ánh xạ $f$.

$f(v) = 0 \Leftrightarrow uv = 0 \Leftrightarrow$ các véc tơ phải vuông góc với véc tơ $u$ đã cho.

Vậy $\ker f$ là tập hợp mọi véc tơ vuông góc với véc tơ $u$ đã cho.

**Định lý 1.** *Ánh xạ tuyến tính $f$ là đơn ánh khi và chỉ khi nhân của $f$ chỉ chứa phần tử không.* $f$ đơn ánh $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

Ta nhắc lại ánh xạ $f$ là đơn ánh nếu $x \neq y$ thì $f(x) \neq f(y)$.

Do đó với $v \neq 0$ ta có $f(v) \neq f(0)$, nhưng $f(0) = 0$ tức là với mọi phần tử $v \neq 0$ ta có $f(v) \neq 0$, ta suy ra $v \notin \ker f$, $\ker f$ chỉ chứa phần tử không.

Đảo lại, giả sử $\ker f = \{0\}$. Gọi $u$ và $v$ là các phần tử của $E$ sao cho ta có $f(u) = f(v)$. Ta phải chứng minh $f$ là đơn ánh tức là phải chứng minh $u = v$.

Thật vậy, do ánh xạ $f$ là tuyến tính nên: $f(u-v) = f(u) - f(v) = 0$.

Ta suy ra $u - v \in \ker f$. Nhưng vì $\ker f = \{0\}$ nên $u - v = 0$ tức là $u = v$.

Vậy $f$ là đơn ánh.

**Định lý 2.** *Giả sử $f$ là một ánh xạ tuyến tính từ $E$ vào $F$, nhân của $f$ chỉ chứa phần tử không. Khi đó, nếu $v_1, v_2, ..., v_n$ là các véc tơ độc lập tuyến tính của $E$ thì $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ cũng độc lập tuyến tính trong $F$. Ngược lại, tạo ảnh của một hệ độc lập luôn độc lập.*

*Chứng minh:* Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các số sao cho: $\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_n f(v_n) = 0$. Ta phải chứng minh $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ (xem định nghĩa hệ véc tơ độc lập tuyến tính ở chương 2).

Theo tính tuyến tính của $f$ ta có: $f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0$

Từ định nghĩa của nhân $f$ ta suy ra: $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in \ker f$

Theo giả thiết $\ker f = \{0\}$ nên $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$

Vì $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính nên từ hệ thức trên ta suy ra $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Vậy $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ độc lập tuyến tính trong $F$.

Ngược lại: Giả sử $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ độc lập tuyến tính trong $F$. Xét tổ hợp $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$. Qua ánh xạ tuyến tính $f$ ta có: $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_n f(v_n) = 0$. Do hệ $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ độc lập tuyến tính trong $F$ nên ta có $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ hay hệ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính.

**Định nghĩa 2.** *Ảnh của một ánh xạ tuyến tính $f$ là tập hợp các véc tơ $w \in F$ sao cho tồn tại phần tử $v \in E$ để $f(v) = w$.* Ta ký hiệu ảnh của $f$ là $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{Im} f = \{w, w \in F : \exists v \in E, f(v) = w\}.$$

Ta có tập $\operatorname{Im} f$ *là một không gian con của* $F$.

Thật vậy, tập $\operatorname{Im} f$ không rỗng, nó chứa phần tử không ($f(0) = 0$).

Nếu $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$ thì tồn tại $v_1, v_2 \in \ker f$ sao cho $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$.

Từ đó: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$, tức là: $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$

Nếu: $w \in \operatorname{Im} f$ thì có $v \in E, f(v) = w$. Từ đó: $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha w.$ Vậy $\alpha w \in \operatorname{Im} f$

**Định lý 3** (định lý nhân - ảnh).

Giả sử $f$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ $E$ vào không gian véc tơ $F$. Nếu số chiều của $E$ là $n$, số chiều của nhân $f$ là $q$ và số chiều của ảnh $f$ là $s$ thì ta có: $n = q + s$.

Nói cách khác: $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

*Chứng minh*: Giả sử $w_1, w_2, ...., w_s$ là một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ . Khi đó có các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_s \in E$ sao cho $f(v_i) = w_i, i = 1, 2, ..., s$. Gọi $u_1, u_2, ..., u_q$ là một cơ sở của $\ker f$. Ta sẽ chứng tỏ hệ véc tơ: $v_1, v_2, ..., v_s, u_1, u_2, ..., u_q$ lập thành một cơ sở của $E$.

Với $v \in E$ thì $f(v) \in \operatorname{Im} f$, ta biểu diễn $f(v)$ theo cơ sở $w_1, w_2, ...., w_s$ của $\operatorname{Im} f$:

$f(v) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_s w_s =$

$= x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + ... + x_s f(v_s) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_s v_s).$

Từ: $f(v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - ... - x_s v_s) = 0$, ta suy ra: $v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - ... - x_s v_s \in \ker f$.

Ta biểu diễn phần tử đó của $\ker f$ theo cơ sở $u_1, u_2, ..., u_q$ của $\ker f$:

$$v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - ... - x_s v_s = y_1 u_1 + y_2 u_2 + ... + y_q u_q$$

hay: $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_s v_s + y_1 u_1 + y_2 u_2 + ... + y_q u_q$

Hệ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_s, u_1, u_2, ..., u_q$ là một hệ các phần tử sinh của $E$.

Để chứng minh chúng lập thành một cơ sở của $E$ ta chỉ còn phải chứng minh chúng độc lập tuyến tính.

Xét tổ hợp tuyến tính:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_q u_q = 0 \qquad (1)$$

Tác động ánh xạ $f$ vào nó và để ý tới tính tuyến tính của $f$ ta có:

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_s f(v_s) + \beta_1 f(u_1) + \beta_2 f(u_2) + ... + \beta_q f(u_q) = 0$$

Vì $u_1, u_2, ..., u_q \in \ker f$ nên $f(u_1) = f(u_2) = ... = f(u_q) = 0$, ta có :

$\alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_s f(v_s) = 0$.

Thay $\mathrm{w_i} = f(v_i)$ vào hệ thức trên ta được:

$$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_s w_s = 0$$

Vì $w_1, w_2, ...., w_s$ là cơ sở nên chúng độc lập tuyến tính, do đó ta suy ra:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0 \qquad (2)$$

Thay vào (1) ta được: $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_q u_q = 0$

Vì $u_1, u_2, ..., u_q$ là cơ sở nên chúng độc lập tuyến tính, từ hệ thức trên ta suy ra:

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q = 0 \qquad (3)$$

Các kết quả (2), (3) cùng với (1) chứng tỏ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_s, u_1, u_2, ..., u_q$ lập thành một cơ sở của $E$. Điều đó chứng tỏ $\dim E = s + q = \dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f$.

Định lý đã được chứng minh.

## 1.3 MA TRẬN VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Cho ma trận $A$ loại $(m \times n)$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$

Xét các không gian véc tơ $R^n$ và $R^m$. Ta biểu diễn các véc tơ của không gian đó bằng các véc tơ cột. Với mọi $v \in R^n$ ta xác định ánh xạ:

$$f : R^n \to R^m \text{ xác định bởi } f(v) = Av$$

(khi nhân một ma trận loại $(m \times n)$ với ma trận cột loại $(n \times 1)$ (đó là một phần tử của $R^n$), ta được một ma trận cột loại $(m \times 1)$ (đó là một phần tử của $R^m$)).

Bằng phép tính ma trận ta thấy rằng ánh xạ $f$ là tuyến tính:

Với $u, v \in R^n$ ta có: $f(u+v) = A(u+v) = Au + Av = f(u) + f(v)$;

Với số $\alpha$ ta có: $f(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha f(u)$

Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là các toạ độ của véc tơ $v$ trong $R^n$; $y_1, y_2, ..., y_m$ là các toạ độ của véc tơ $f(v)$ trong $R^m$ theo các cơ sở đã chọn trước trong các không gian đó ta có thể viết biểu thức $f(v) = Av$ dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Như vậy, cho một ma trận $A$ loại $(m \times n)$ ta có thể xác định được một ánh xạ tuyến tính từ một không gian $m-$ chiều vào một không gian $n-$ chiều, ánh xạ đó được xác định bởi $f(v) = Av$, với $v$ là véc tơ cột thuộc $R^n$. Ma trận $A$ được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính $f$ trong các cơ sở đã chọn của $R^n$ và $R^m$*.

Ngược lại, cho một ánh xạ tuyến tính $f: R^n \to R^m$ thì ta có thể tìm được ma trận của ánh xạ đó trong các cơ sở đã chọn của $R^n$ *và* $R^m$.

Giả sử: $(e_1, e_2, ..., e_n)$ là một cơ sở của $R^n$; $(f_1, f_2, ..., f_m)$ là một cơ sở của $R^m$.

Với $v \in R^n$ ta có: $v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$

Do $f$ là ánh xạ tuyến tính nên:

$$f(v) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n) \qquad (4)$$

Vì $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ là các véc tơ thuộc $R^m$ nên ta có thể biểu diễn chúng theo cơ sở $(f_1, f_2, ..., f_m)$:

$$f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m$$
$$f(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{m2}f_m$$
$$..............................................$$
$$f(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m$$

Thay các giá trị vừa nhận được vào vế phải của (4) ta được:

$$f(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)f_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)f_2 + \\ + ... + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)f_m \qquad (5)$$

Mặt khác vì $f(v) \in R^m$ nên: $f(v) = y_1f_1 + y_2f_2 + ... + y_mf_m$ (6)

Do $f(v)$ được biểu diễn một cách duy nhất qua cơ sở $(f_1, f_2, ..., f_m)$, nên từ (5), (6) ta suy ra:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$
$$..........................................$$
$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n$$

Có thể viết kết qủa trên dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$Y = A.X$$

Ta đã xác định được ma trận của ánh xạ đó.

Như vậy, nếu $f$ là ánh xạ tuyến tính từ $R^n$ vào $R^m$ và $(e_1, e_2, ..., e_n)$, $(f_1, f_2, ..., f_m)$ lần lượt là các cơ sở đã cho của $R^n$ và $R^m$ thì ma trận của ánh xạ $f$ là một ma trận loại $(m \times n)$ có các phần tử nằm trên cột thứ $j$ là các toạ độ của véc tơ $f(e_j)$ tính theo cơ sở đã cho của $R^m$.

***Ví dụ:*** Gọi $P_n$ là không gian các đa thức có bậc không vượt quá $n$. Xét ánh xạ $f$ từ $P_3$ vào $P_2$ xác định bởi $f(v) = v'$ với $v \in P_3$ và $v'$ là đạo hàm của $v$.

Như ta đã biết ánh xạ đó là tuyến tính. Ta tìm ma trận của nó trong các cơ sở $x^3, x^2, x, 1$ của $P_3$; $x^2, x, 1$ của $P_2$. Ta phải tìm ảnh của các véc tơ cơ sở của $P_3$ trong $P_2$.

Ta có:

$$f(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = (3,0,0)$$
$$f(x^2) = (x^2)' = 2x = (0,2,0)$$
$$f(x) = (x)' = 1 = (0,0,1)$$
$$f(1) = (1)' = (0,0,0)$$

Vậy ma trận của ánh xạ này là: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

### 1.4 MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

Giả sử $B = \{e_1,...,e_n\}$ và $B' = \{e'_1,...,e'_n\}$ là hai cơ sở trong cùng một không gian véc tơ $E$ có số chiều là $n$.

Ta biểu diễn các véc tơ $e'_1,...,e'_n$ theo các véc tơ của cơ sở $B$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n \end{aligned} \tag{7}$$

**Định nghĩa**: Ma trận:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mà cột thứ $j$ là các toạ độ của véc tơ $e'_j$ theo cơ sở $B$ được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $B$ sang cơ sở $B'$.

Giả sử $v \in E$.

Gọi $x_1, x_2,..., x_n$ là các toạ độ của véc tơ $v$ theo cơ sở $B$

Gọi $x'_1, x'_2,..., x'_n$ là các toạ độ của nó theo cơ sở $B'$

Ta cần tìm công thức liên hệ giữa hai toạ độ đó.

$$v = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x'_j a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j e_i \tag{8}$$

Mặt khác, biểu diễn $v$ theo cơ sở $B$ ta có:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{9}$$

So sánh (8) và (9) ta được: $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j;\ \ i = 1,2,...,n$

Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$ và $P$ là ma trận chuyển ở trên ta có: $X = P.X'$ (10)

Ta chú ý rằng ở trên ta đã chuyển từ cơ sở $B$ sang cơ sở $B'$. Khi đó ma trận chuyển là $P$ và ta có công thức (9). Ta cũng có thể chuyển từ cơ sở $B'$ sang cơ sở $B$. Như vậy ma trận $P$ phải là ma trận khả nghịch và ta có: $X' = P^{-1}X$

Vậy ma trận chuyển từ cơ sở $B'$ sang cơ sở $B$ là ma trận nghịch đảo $P^{-1}$

***Ví dụ 1***: Xét hệ toạ độ trực chuẩn $Oxy$ trong mặt phẳng. Quay hệ trục này một góc $\alpha$ ta được hệ trục $Ox'y'$. Lập công thức chuyển toạ độ từ hệ $Oxy$ sang hệ $Ox'y'$.

Gọi $e_1, e_2$ là các véc tơ đơn vị trên các trục số $Ox, Oy$;

$e'_1, e'_2$ là các véc tơ đơn vị trên các trục số $Ox', Oy'$, ta có:

$e'_1 = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$

$e'_2 = e_1 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + e_2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha.$

Vậy ma trận chuyển từ hệ $Oxy$ sang $Ox'y'$ là:

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Từ $X = PX'$ với $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ta suy ra:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha;$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

***Ví dụ 2:*** Cho không gian $R^4$ với cơ sở chính tắc:

$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$$

Ta xét một cơ sở mới:

$$e'_1 = (0,1,1,1), e'_2 = (1,0,1,1), e'_3 = (1,1,0,1), e'_4 = (1,1,1,0)$$

Lập công thức chuyển từ các toạ độ chính tắc $x_1, x_2, x_3, x_4$ của một véc tơ $v \in R^4$ sang các toạ độ $x_1', x_2', x_3', x_4'$ của véc tơ đó theo cơ sở mới.

Ma trận chuyển cơ sở là ma trận có các cột là các toạ độ của các véc tơ $e_1', e', e_3', e_4'$ theo cơ sở chính tắc. Ta có:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{x_1' + {}} x_2' + x_3' + x_4' \\ x_2 &= x_1' \phantom{{} + x_2'} + x_3' + x_4' \\ x_3 &= x_1' + x_2' \phantom{{} + x_3'} + x_4' \\ x_4 &= x_1' + x_2' + x_3' \end{aligned}$$

## 1.5 MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI CHUYỂN CƠ SỞ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : E \to E$, $A$ là ma trận của ánh xạ $f$ đối với cơ sở $B$ của $E$. $P$ là ma trận chuyển từ cơ sở $B = \{e_1, ..., e_n\}$ sang cơ sở $B' = \{e_1', ..., e_n'\}$. Khi đó ma trận của ánh xạ $f$ trong cơ sở $B'$ sẽ là $A'$. Ta tìm mối liên hệ giữa $A$ và $A'$.

Dạng ma trận của ánh xạ $f$ đối với cơ sở $B$ là: $Y = AX$

đối với cơ sở $B'$ là: $Y' = A'X'$ (11)

Vì $P$ là ma trận chuyển từ cơ sở $B$ sang cơ sở $B'$ nên:

$$X = PX', Y = PY'$$

Từ đó ta có:

$$PY' = Y = AX = APX';$$

ta suy ra: $Y' = P^{-1}PY' = P^{-1}APX'$.

So sánh với (11) ta được: $A' = P^{-1}AP$.

Ta đi tới kết quả sau:

**Định lý:** *Nếu $A$ và $A'$ là hai ma trận của một ánh xạ tuyến tính $f$ từ không gian $E$ vào chính nó đối với hai cơ sở $B$ và $B'$, và nếu $P$ là ma trận chuyển từ cơ sở $B$ sang cơ sở $B'$ thì: $A' = P^{-1}AP$*

**Định nghĩa:** *Hai ma trận $A$ và $A'$ sao cho có một ma trận khả nghịch $P$ thoả mãn hệ thức $A' = P^{-1}AP$ được gọi là hai* ***ma trận đồng dạng****.*

Như vậy, *các ma trận của cùng một ánh xạ tuyến tính $f$ từ $E$ vào chính nó trong các cơ sở khác nhau thì đồng dạng với nhau.*

***Ví dụ:*** Xét ánh xạ tuyến tính từ $R^3$ vào chính nó được cho bởi ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở chính tắc trong $R^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

Phép chuyển sang cơ sở mới $B'$ được cho bởi:

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3$$
$$e_2' = 2e_1 + e_2 + 3e_3$$
$$e_3' = e_1 + e_2 + e_3$$

Tìm ma trận $A'$ của ánh xạ theo cơ sở mới và cho biểu diễn của ánh xạ đó theo toạ độ trong $B'$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $B'$ là:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ta có } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Từ đó: } A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Biểu thức của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở $B'$ là:

$$Y' = AX' \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = x_1' + 3x_2' \\ y_2' = x_2' \\ y_3' = 4x_1' - 2x_2' + 2x_3' \end{cases}$$

*Chú ý:* Ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ $E$ vào chính nó còn được gọi là phép biến đổi tuyến tính. Một số phép biến hình mà chúng ta đã được học ở chương trình trung học như phép quay một điểm xung quanh gốc $O$ một góc $\alpha$, phép vị tự tâm $O$ tỷ số $k$, phép đối xứng qua một trục toạ độ,…đều là các phép biến đổi tuyến tính.

Chẳng hạn, các ma trận của phép quay một điểm xung quang gốc $O$ một góc $\alpha$ và của phép đối xứng qua trục $Oy$ lần lượt là:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§

$f(v) = \lambda v$ và $f(v) = \eta v$

$\lambda v = \eta v \Leftrightarrow (\lambda - \eta)v = 0$; do $v \neq 0$ nên $\lambda = \eta$

*b, Trái lại, một giá trị riêng có thể liên kết với nhiều véc tơ riêng.*

Thật vậy, nếu $\lambda$ là một giá trị riêng liên kết với véc tơ v thì $f(v) = \lambda v$

Giả sử $k$ là một số khác không, do ánh xạ $f$ là tuyến tính ta có:

$f(kv) = kf(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$

điều đó chứng tỏ $kv$ cũng là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$

## 2.2 ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG

Cho phép biến đổi tuyến tính $f: E \to E$. Giả sử $A$ là ma trận của phép biến đổi đó theo cơ sở $e_1, e_2, ..., e_n$. Ta ký hiệu véc tơ riêng $v \in E$ dưới dạng ma trận cột $X$ thì dạng ma trận của biểu thức $f(v) = \lambda v$ sẽ là:

$$AX = \lambda X \text{ hay } (A - \lambda I)X = 0 \qquad (12)$$

Trong đó $I$ là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận $A$.

Ta được một hệ n phương trình tuyến tính thuần nhất.

Theo quy tắc Cramer, nếu $\det(A - \lambda I) \neq 0$ thì hệ có nghiệm tầm thường duy nhất $X = 0$.

Vậy để hệ (12) có nghiệm khác không thì cần và đủ là: $\det(A - \lambda I) = 0$

Các giá trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ hay của ánh xạ $f$ là các nghiệm của phương trình: $\det(A - \lambda I) = 0$ (12')

**Định nghĩa:** *Định thức $\det(A - \lambda I)$ là một đa thức bậc $n$ đối với $\lambda$. Ta gọi nó là **đa thức đặc trưng** của ma trận $A$; phương trình (12') là **phương trình đặc trưng** của $A$ (hay của ánh xạ $f$).*

***Ví dụ 1.*** Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2$ bởi ma trận: $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của nó.

Ta có phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

Giải phương trình bậc hai đối với $\lambda$ ta được: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$

Để tìm véc tơ riêng liên kết với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta giải hệ thuần nhất:

$$(A - \lambda_1 I)X = 0$$

tức là: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 & = 0 \end{cases}$

Hệ đó tương đương với phương trình: $2x_1 + x_2 = 0$. Có thể cho $x_1 = 1$ khi đó ta có $x_2 = -2$. Véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là $v_1 = (1, -2)$

Để tìm véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 7$ ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 & = 0 \end{cases}$$

Hệ tương đương với $x_1 - 2x_2 = 0$; cho $x_2 = 1$ thì suy ra $x_1 = 2$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_2 = 7$ là $v_2 = (2, 1)$

***Ví dụ 2.*** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

Nó có nghiệm kép $\lambda_{1,2} = 1$ và nghiệm đơn $\lambda_3 = 3$

Ta xét phương trình $(A - \lambda I)X = 0$

với $\lambda_{1,2} = 1$ ta có: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases}$

Từ đó $x_3 = 0$, có thể cho $x_1 = x_2 = 1$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_{1,2} = 1$ là $v_1 = (1, 1, 0)$

Với $\lambda_3 = 3$ ta có: $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ \qquad x_3 &= 0 \end{cases}$

Từ đó $x_3 = 0$, có thể cho $x_1 = 1, x_2 = -1$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_3 = 3$ là $v_2 = (1, -1, 0)$

## 2.3 ĐƯA MA TRẬN VUÔNG VỀ DẠNG CHÉO

Ta xét ánh xạ $f$ từ $E$ vào chính nó. Giả sử ma trận $A$ của ánh xạ có $n$ trị riêng thực khác nhau. Ta sẽ chứng tỏ trong trường hợp đó $n$ véc tơ riêng ứng với $n$ trị riêng sẽ lập thành một cơ sở của $E$.

**Định lý:** *Giả sử $f$ là một ánh xạ từ không gian $n$ chiều $E$ vào chính nó. Nếu các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ của $f$ đôi một khác nhau thì các véc tơ riêng tương ứng của chúng $v_1, v_2, ..., v_n$ lập thành một cơ sở của $E$.*

*Chứng minh*: Do số chiều của $E$ là $n$ nên ta chỉ còn phải chứng minh $n$ véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính.

Giả sử hạng của hệ véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ là $r$ với $r < n$ (tức là số véc tơ độc lập tuyến tính lớn nhất của hệ là $r$). Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết đó là $r$ véc tơ đầu $v_1, v_2, ..., v_r$. Khi đó các véc tơ còn lại sẽ là tổ hợp tuyến tính của $r$ véc tơ đó: $v_{r+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$ (13)

Do $f$ là ánh xạ tuyến tính nên:

$$f(v_{r+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_r f(v_r)$$

Các $v_i$ là các véc tơ riêng nên $f(v_i) = \lambda_i v_i$, ta có:

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_r \lambda_r v_r$$

Thay $v_{r+1}$ bởi (13):

$$\lambda_{r+1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_r \lambda_r v_r$$

Từ đó: $\alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1) v_1 + \alpha_2(\lambda_{r+1} - \lambda_2) v_2 + ... + \alpha_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r) v_r = 0$

Vì các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_r$ độc lập tuyến tính và các $\lambda_i$ đôi một khác nhau nên ta suy ra: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$.

Thay vào (13) ta được $v_{r+1} = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $v_{r+1}$ là véc tơ riêng. Mâu thuẫn đó xuất phát từ chỗ ta giả thiết $r < n$. Vậy phải có $r = n$.

$n$ véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính của không gian $n$ chiều $E$ lập thành một cơ sở của không gian đó. Định lý đã được chứng minh.

Bây giờ ta tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f$ theo cơ sở $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là $n$ véc tơ riêng của không gian đó.

Do:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = (\lambda_1, 0, \ldots, 0)$$
$$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = (0, \lambda_2, \ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(v_n) = \lambda_n v_n = (0, 0, \ldots, \lambda_n)$$

Ma trận của ánh xạ là ma trận chéo:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp này ta nói *ma trận của ánh xạ tuyến tính $A$ đã được chéo hoá*. Như vậy *muốn chéo hoá một ma trận $A$ ta phải lấy một cơ sở của không gian $E$ gồm $n$ véc tơ độc lập tuyến tính của ma trận đó.*

Nếu $P$ là ma trận chuyển từ cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sang cơ sở $v_1, v_2, \ldots, v_n$ của không gian $E$ thì theo 1.4 ta có: $D = P^{-1}AP$

Như vậy, *mọi ma trận vuông cấp $n$ $A$ có $n$ giá trị riêng khác nhau từng đôi thì đồng dạng với ma trận chéo $D$ có các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng của $A$.*

***Ví dụ:*** Hãy chéo hoá ma trận $A$ và tìm ma trận chuyển $P$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 4\\ 2 & -\lambda & -4\\ -1 & 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

Ma trận $A$ có 3 giá trị riêng phân biệt: $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

Ma trận chéo phải tìm là: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

Để tìm ma trận chuyển ta phải tìm các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng đó.

Với $\lambda_1=1$ ta có $\begin{cases} x_2+4x_3 &= 0\\ 2x_1-x_2-4x_3 &= 0\\ -x_1+x_2+4x_3 &= 0\end{cases} \Rightarrow x_1=0, x_2=-4x_3,$ $x_3$ tuỳ ý

Chọn $x_3=1$ ta suy ra $x_2=-4$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_1=1$ là $v_1=(0,-4,1)$

Với $\lambda_2=2$ ta có $\begin{cases} -x_1+x_2+4x_3 &= 0\\ 2x_1-2x_2-4x_3 &= 0\\ -x_1+x_2+3x_3 &= 0\end{cases} \Rightarrow x_3=0, x_1=x_2=1$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_2=2$ là $v_2=(1,1,0)$

Với $\lambda_3=3$ ta có $\begin{cases} -2x_1+x_2+4x_3 &= 0\\ 2x_1-3x_2-4x_3 &= 0\\ -x_1+x_2+2x_3 &= 0\end{cases} \Rightarrow x_2=0, x_1=2x_3$

Cho $x_3=1$ ta suy ra $x_1=2$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_3=3$ là $v_3=(2,0,1)$

Ma trận chuyển $P$ là ma trận có các cột là toạ độ của các véc tơ riêng $v_1,v_2,v_3$

$$P=\begin{pmatrix}0&1&2\\4&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix};$$

nếu tính ma trận nghịch đảo của $P$ ta có:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Có thể nghiệm lại rằng: $D = P^{-1}AP$

*Chú ý:* Điều kiện đa thức đặc trưng bậc $n$ có $n$ nghiệm phân biệt chỉ là một điều kiện đủ để chéo hoá một ma trận. Trong trường hợp đa thức đặc trưng có nghiệm bội người ta đã chứng minh được rằng nếu vẫn tìm được $n$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính thì ta vẫn có thể chéo hoá được ma trận $A$.

## 2.4 CHÉO HOÁ TRỰC GIAO

### 1. Không gian với tích vô hướng

Trong không gian $R^n$ cho hai véc tơ $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$

**Định nghĩa:** *Tích vô hướng của hai véc tơ $u$ và $v$, ký hiệu là $u.v$ là một số thực:*

$$u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

*Độ dài* hay *chuẩn* của một véc tơ u là: $\|u\| = \sqrt{u.u}$

Hai véc tơ $u, v$ là *trực giao* nếu $u.v = 0$

Hai véc tơ $u, v$ là trực chuẩn nếu chúng trực giao và có độ dài bằng đơn vị

$$u.v = 0; \|u\| = \|v\| = 1$$

***Ví dụ:*** Các véc tơ của cơ sở chính tắc trong $R^3$:

$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ là các véc tơ trực chuẩn.

Ta chú ý rằng tập các véc tơ trực chuẩn trong $R^n$ là độc lập tuyến tính.

Thật vậy, giả sử $v_1, v_2, ..., v_n$ là các véc tơ trực chuẩn. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right).v_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i v_j + \alpha_j v_j v_j = 0 \qquad (14)$$

Do các véc tơ $v_i$ trực giao nên $v_i v_j = 0$ với $i \neq j$

Do các véc tơ $v_i$ trực chuẩn nên $v_i v_j = 1$ với $i = j$

Từ (14) ta suy ra: $\alpha_j.1 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$

Lần lượt cho $j$ các giá trị $1,2,...,n$ ta sẽ có mọi $\alpha_j = 0$. Điều đó chứng tỏ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính.

**2. Chéo hoá trực giao**

**Định nghĩa:** *Nếu ma trận $A$ có $n$ véc tơ riêng trực chuẩn thì việc chéo hoá ma trận $A$ được gọi là* ***chéo hoá trực giao.***

Trong trường hợp đó ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sang cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sẽ thoả mãn điều kiện:

$$v_i v_j = \begin{cases} 0 & khi \;\; i \neq j \\ 1 & khi \;\; i = j \end{cases} \qquad (15)$$

Ta có thể coi cột $v_i$ của ma trận chuyển $P$ là hàng thứ $i$ của ma trận chuyển vị $P^t$ nên tích vô hướng $v_i v_j$ chính là phần tử ở vị trí $(i, j)$ của ma trận tích $P^t P$. Do (15) ta thấy rằng ma trận tích có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1 còn các phần tử khác bằng không, đó là ma trận đơn vị.

Vậy ta có: $P^t P = I$

Mặt khác ta có: $P^{-1} P = I$ ta suy ra: $P^t = P^{-1}$

**Định nghĩa:** *Ma trận $P$ có tính chất: chuyển vị nó ta được ma trận nghịch đảo, được gọi là* ***ma trận trực giao****.*

***Ví dụ:*** Ma trận $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ là trực giao vì:

$$P^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = P^{-1}$$

Giả sử $A$ là ma trận chéo hoá trực giao được.

Khi đó tồn tại ma trận trực giao $P$ để: $D = P^{-1} A P$

Từ đó suy ra: $A = PDP^{-1} = PDP^t$

Theo tính chất chuyển vị của ma trận tích ta có:

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PDP^t = A$$

Điều đó có nghĩa là ma trận $A$ phải là ma trận đối xứng.

Như vậy, nếu *ma trận $A$ có thể chéo hoá trực giao được thì nó phải là ma trận đối xứng.*

Ta thừa nhận rằng, ngược lại nếu ma trận $A$ là ma trận đối xứng thì nó chéo hoá trực giao được.

Để minh hoạ điều đó ta xét ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Nó là ma trận đối xứng. Phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Ta có 3 trị riêng $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Các véc tơ riêng ứng với các trị riêng đó là:

$$v_1 = (1,2,2), v_2 = (2,1,-2), v_3 = (-2,2,-1)$$

Ta có: $v_1v_2 = v_2v_3 = v_3v_1 = 0$, các véc tơ đó trực giao. Bây giờ ta chuẩn hoá chúng (tức là đưa các véc tơ đó về các véc tơ đơn vị).

$$V_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \qquad V_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}), \quad V_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở gồm các véc tơ trực chuẩn $V_1, V_2, V_3$ là:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Dễ dàng kiểm chứng rằng $P^tP = I$.

Ma trận chéo hoá của $A$ là $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

## §3. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

### 3.1 DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

Tập hợp các số thực $R$ được coi là một không gian véc tơ trên chính nó.

**Định nghĩa**: *Một ánh xạ tuyến tính $f$ từ không gian véc tơ $X$ vào $R$ được gọi là một dạng tuyến tính đối với $x \in X$.*

Xét tích Đề - các $X \times X$, đó là tập các cặp $(x,y)$ với $x \in X$ $y \in X$

*Một ánh xạ $f : X \times X \to R$ được gọi là một dạng song tuyến tính nếu nó là một dạng tuyến tính đối với $x$ (coi $y$ là không đổi) và là dạng tuyến tính đối với $y$ (coi $x$ như không đổi).*

Nói cách khác, ánh xạ $f : X \times X \to R$ là dạng song tuyến tính nếu:

$$\forall \mathrm{x}, \mathrm{x}_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R :$$
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y)$$
$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2)$$

***Ví dụ:*** Xét tích vô hướng của hai véc tơ trong $R^3$. Từ các tính chất đã biết của tích vô hướng ta có:

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2).v = \alpha_1(u_1.v) + \alpha_2(u_2.v);$$
$$u(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1(u.v_1) + \alpha_2(u.v_2).$$

Vậy tích vô hướng trong $R^3$ là một dạng song tuyến tính.

*Một dạng song tuyến tính $f$ là đối xứng nếu và chỉ nếu:*

$$f(x,y) = f(y,x); \forall x, y \in X$$

*Một dạng song tuyến tính $f$ là xác định dương nếu và chỉ nếu:*

$$f(x,x) \geq 0; f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tích vô hướng nói trên là một dạng song tuyến tính đối xứng và xác định dương.

Xét dạng song tuyến tính: $f : X^2 \to R$

Giả sử $X$ là không gian có số chiều hữu hạn là $n$ và $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của $X$.

Ta có: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$

Khi đó: $f(x,y) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i f(u_i, u_j) y_j$

Đặt $a_{\mathrm{ij}} = f(u_i, u_j)$ và coi nó là phần tử ở vị trí $(i, j)$ của một ma trận $A$ thì hệ thức trên có thể được coi là tích của 3 ma trận:

$$f(x,y) = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ma trận $A = (a_{\mathrm{ij}})$ được gọi là *ma trận của dạng song tuyến tính* $f$.

Ta thừa nhận rằng *một dạng song tuyến tính là đối xứng khi và chỉ khi ma trận của nó là đối xứng.*

## 3.2 DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Xét dạng song tuyến tính đối xứng:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ với } \mathrm{a_{ij}} = a_{ji}$$

Khi thay $x$ bởi $y$ ta sẽ được dạng toàn phương.

**Định nghĩa:** *Một dạng toàn phương trong* $R^n$ *là biểu thức có dạng:*

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ với } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \text{ và } \mathrm{a_{ij}} = a_{ji}$$

Ta ký hiệu dạng toàn phương của biến $x$ là $Q(x)$

***Ví dụ:***

Dạng toàn phương trong $R^2$ là:

$$Q(x) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2$$

Dạng toàn phương trong $R^3$ là:

$$Q(x) = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

Dạng ma trận của dạng toàn phương là:

$$Q(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

với ma trận $A$ là ma trận đối xứng.

**Dạng chính tắc của dạng toàn phương**

*Nếu ma trận $A$ của dạng toàn phương là ma trận chéo, tức là $a_{ij} = 0$ với $i \neq j$ thì ta có **dạng chính tắc** của dạng toàn phương:*

$a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + ... + a_{nn}x_n{}^2$

Nó chỉ chứa các số hạng bình phương mà không chứa các số hạng chữ nhật $x_i x_j$ với i $\neq j$.

Rút gọn một dạng toàn phương tức là đưa nó về dạng chính tắc, điều đó có nghĩa phải đưa ma trận của dạng toàn phương về dạng chéo.

Do ma trận $A$ của dạng toàn phương là ma trận đối xứng nên nếu nó có $n$ trị riêng thực phân biệt thì $n$ véc tơ riêng tương ứng của chúng sẽ lập thành một cơ sở trực giao và ta có thể đưa cơ sở đó về cơ sở trực chuẩn. Như vậy ma trận $A$ của dạng toàn phương sẽ *chéo hoá trực giao* được.

Ta sẽ xét xem khi thực hiện phép chuyển cơ sở của dạng toàn phương đã cho về cơ sở trực chuẩn lập bởi các véc tơ riêng thì ma trận $A$ của dạng toàn phương sẽ thay đổi như thế nào?

Ta có dạng toàn phương xuất phát với ma trận đối xứng $A$:

$Q(x) = X^t AX$, trong đó $X$ là ma trận cột

Chuyển sang cơ sở mới lập thành từ các véc tơ riêng thì ma trận chuyển cơ sở $P$ là ma trận trực giao.

$$X = PX' \Rightarrow X^t = (PX')^t = (X')^t P^t = (X')^t P^{-1}$$

Từ đó: $Q(x) = (X')^t P^{-1}APX'$

Nhưng $P^{-1}AP$ chính là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng $\lambda_i$.

Ta được dạng chính tắc của dạng toàn phương là:

$$X'^t DX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + ... + \lambda_n x_n'^2$$

Như vậy muốn đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc ta phải chuyển cơ sở đã cho của dạng toàn phương về cơ sở gồm các véc tơ riêng trực chuẩn; khi đó các hệ số trong dạng chính tắc sẽ là các giá trị riêng.

***Ví dụ:*** Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc và tìm ma trậnn chuyển của nó. $Q(x) = 5{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 5{x_2}^2$

Ma trận A của dạng toàn phương: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

Phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)^2 - 16 = 0; \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$$

Với trị riêng $\lambda_1 = 1$ ta có véc tơ riêng $(1,-1)$, chuẩn hoá nó ta được

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Với trị riêng $\lambda_2 = 9$ ta có véc tơ riêng chuẩn hoá $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ma trận chuyển cơ sở là: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Dạng chính tắc của dạng toàn phương là: $Q = x_1'^2 + 9x_2'^2$

Có thể nghiệm lại rằng phép chuyển cơ sở nói trên chính là phép biến đổi:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}{x_1}' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$$
$$x_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}{x_1}' + \frac{1}{\sqrt{2}}{x_2}'$$

Thay $x_1, x_2$ vào dạng toàn phương đã cho ta sẽ đưa được nó về dạng chính tắc như trên.

Về mặt hình học, phép biến đổi đối với ma trận P ở trên là phép quay trong mặt phẳng xung quanh gốc $O$ một góc $\frac{-\pi}{4}$. Như vậy nêu trong mặt phẳng ta có đường cong cho bởi phương trình $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$ thì phép quay nói trên sẽ đưa phương trình đó về dạng $x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0$ hay $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1$. Ta được phương trình chính tắc của đường elip trong hệ trục toạ độ $\mathrm{O x'y'}$ nhận được do quay hệ trục toạ độ $Oxy$ một góc $\frac{-\pi}{4}$

***Ví dụ 2:*** Tìm phép biến đổi để đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc: $Q(x) = 7{x_1}^2 + 6{x_2}^2 + 5{x_3}^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

Ta viết ma trận $A$ của dạng toàn phương và đa thức đặc trưng $\det(A - \lambda I)$:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Các giá trị riêng là $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Các véc tơ riêng chuẩn hoá tương ứng là:

$$v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);\ v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right);\ v_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Ma trận chuyển: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Phép biến đổi:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}{x_1}' + \frac{2}{3}{x_2}' - \frac{2}{3}{x_3}' \\ x_2 &= \frac{2}{3}{x_1}' + \frac{1}{3}{x_2}' + \frac{2}{3}{x_3}' \\ x_3 &= \frac{2}{3}{x_1}' - \frac{2}{3}{x_2}' - \frac{1}{3}{x_3}' \end{aligned}$$

Dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho là:

$$Q = 3{x_1}'^2 + 6x_2'^2 + 9{x_3}'^2$$

*Chú ý:* Dạng chính tắc của một dạng toàn phương không phải duy nhất. Ngoài việc chéo hoá trực giao ma trận A như đã mô tả ở trên người ta còn có thể dùng các phương pháp khác để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc. Ta trở lại dạng toàn phương đã xét trong ví dụ 1:

$$Q(x) = 5{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 5{x_2}^2$$

Ta có thể biến đổi:

$$Q = 5(x_1{}^2 + \frac{8}{5}x_1x_2 + \frac{16}{25}x_2{}^2) + 5x_2{}^2 - \frac{16}{5}x_2{}^2 = 5(x_1 + \frac{4}{5}x_2)^2 + \frac{9}{5}x_2{}^2$$

Đặt $\xi_1 = x_1 + \frac{4}{5}x_2; \xi_2 = x_2$ ta có: $Q = 5\xi_1{}^2 + \frac{9}{5}\xi_2{}^2$

Ta được một dạng chính tắc khác của dạng toàn phương đã cho.

## 3.3 DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH DƯƠNG

**Định nghĩa:** *Một dạng toàn phương được gọi là* ***xác định dương*** *nếu với mọi $x \neq 0$ thuộc $E$ ta có $Q(x) > 0$.*

Trong trường hợp này *ma trận $A$ của dạng toàn phương cũng được gọi là ma trận xác định dương.*

Bằng cách thay $X$ bởi các véc tơ thuộc cơ sở chính tắc của $E$ ta sẽ suy ra:

*Nếu $Q$ là dạng toàn phương xác định dương thì $a_{ii} > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.* Trong trường hợp ma trận $A$ của dạng toàn phương có $n$ trị riêng phân biệt là số dương, dạng chính tắc của nó $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2, \lambda_i > 0$, dạng toàn phương là xác định dương.

Bây giờ ta sẽ phát biểu một điều kiện cần và đủ để một dạng toàn phương là xác định dương. Giả sử ma trận của dạng toàn phương là $A$. Từ định thức của ma trận $A$ ta trích ra các định thức con cấp $k$:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \text{ với } k \text{ lần lượt bằng } 1, 2, \dots, n.$$

Các định thức $\Delta_k$ được gọi là các *định thức con chính cấp $k$ của ma trận $A$*.

Ta công nhận kết quả sau:

*Nếu mọi định thức con chính của ma trận $A$ đều dương thì dạng toàn phương với ma trận $A$ là xác định dương.*

***Ví dụ 3:*** Dạng toàn phương đã xét trong ví dụ 2 là xác định dương vì nó có ba giá trị riêng dương. Nếu xét các định thức con chính của $A$ thì ta có:

$$\Delta_1 = 7;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 162$$

Cả ba định thức con chính đều dương nên dạng toàn phương là xác định dương.

***Ví dụ:*** Dạng toàn phương:

$$3{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5{x_3}^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

không xác định dương vì ma trận $A$ của nó có chứa một định thức con chính:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Một dạng toàn phương $Q$ là *xác định âm* nếu dạng toàn phương $-Q$ là xác định dương.

Nếu ma trận của $Q$ là $A$ thì ma trận của $-Q$ là $-A$. Khi tính các định thức con chính cấp $k$ thì bằng cách đưa dấu $-$ ra ngoài định thức ta thấy rằng nếu $k$ là số chẵn thì định thức con chính cấp $k$ của $A$ và $-A$ sẽ như nhau, còn nếu $k$ là số lẻ thì định thức con chính cấp lẻ của $A$ và $-A$ là trái dấu nhau.

Từ đó: *Một dạng toàn phương là xác định âm khi và chỉ khi mọi định thức con chính cấp lẻ đều âm, mọi định thức con chính cấp chẵn đều dương.*

## BÀI TẬP

**5.1** Trong các ánh xạ $f: R^3 \to R$ sau đây, ánh xạ nào là tuyến tính?

$$a)\, f(x,y,z) = 3x + 2y - 5z;$$

$$b)\, f(x,y,z) = 5x - 3y;$$

$$c)\, f(x,y,z) = 10x + 4y - 3z + 1$$

**5.2** Xét tập hợp $F$ các hàm số liên tục trên $[a,b]$. Với mỗi hàm $v \in F$ ta xét ánh xạ $I: F \to R$ víi $I(v) = \int_a^b v(x)dx$. Chứng minh rằng $I$ là ánh xạ tuyến tính.

**5.3** $C$ là không gian véc tơ các số phức. Xét ánh xạ $f: C \to C$ xác định bởi với $z = x + iy \in C;$ ta có $f(z) = (a + bi)z,\ a, b$ là các số thực. Chứng tỏ rằng $f$ là ánh xạ tuyến tính và tìm ma trận của ánh xạ đó.

**5.4** Trong không gian véc tơ $R^2$ cho cơ sở $A = \{(-1,1),(1,-1)\}$. Trong không gian véc tơ $R^3$ cho cơ sở $B = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$. Hãy tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \to R^3$ xác định như sau:

$$a)\, f(x,y) = (x, y, x + y);$$

$$b)\, f(x,y) = (0, x + y, x - y)$$

**5.5** Với mỗi đa thức $P(x)$ có bậc không vượt quá 3 ta cho tương ứng đa thức:

$Q(x) = (2x+1)P(x) - (x^2 - 1)P'(x)$, với $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$.

a) Chứng minh rằng ánh xạ $f: E_3 \to E_4$, với $E_3, E_4$ lần lượt là các không gian các đa thức không vượt quá 3 và 4, xác định như trên là một ánh xạ tuyến tính.

b) Chứng minh rằng $f$ là đơn ánh.

c) Các không gian $E_3$ và $E_4$ được quy về các cơ sở $1, x, x^2, x^3$ và $1, x, x^2, x^3, x^4$, hãy xác định ma trận của ánh xạ $f$.

**5.6** Trong $R^3$ cho cơ sở chính tắc $e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)$.

Xét phép biến đổi tuyến tính $f: R^3 \to R^3$ có ma trận: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tính các thành phần $x', y', z'$ của $f(v)$ theo các thành phần $x, y, z$ của $v$.

Chứng tỏ rằng $f$ là song ánh và tính $x, y, z$ theo $x', y', z'$. Từ đó suy ra ma trận nghịch đảo $A^{-1}$.

**5.7** Trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá 3 quy về cơ sở $1, x, x^2, x^3$, ta xét đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

a) Chứng minh rằng các đa thức $P, P', P'', P'''$ lập nên một cơ sở mới của không gian đang xét.

b) Lập ma trận chuyển $H$ từ cơ sở $1, x, x^2, x^3$ sang cơ sở $P, P', P'', P'''$.

c) $Q(x)$ là một đa thức bất kỳ.

Ta đặt: $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = b_0 P + b_1 P' + b_2 P'' + b_3 P'''$.

Tính: $a_0, a_1, a_2, a_3$ theo $b_0, b_1, b_2, b_3$ và ngược lại. Suy ra ma trận $H^{-1}$.

**5.8** Ta xét môt ánh xạ $f: R^4 \to R^4$ cho tương ứng mỗi phần tử $(x, y, z, t)$ của $R^4$ với phần tử $(x + y, y - z, z + x)$ của $R^3$. Chứng tỏ rằng $f$ là ánh xạ tuyến tính. Tìm một cơ sở của $Kerf$ và của $\operatorname{Im} f$.

**5.9** Tìm các trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**5.10** Tìm các trị riêng và các véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính trong $R^2$ được cho bởi: $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 8x + 9y \end{cases}$

**5.11** Tìm trị riêng và véc tơ riêng của phép quay trong không gian xung quanh trục $Oz$ một góc $\frac{\pi}{3}$.

**5.12** Đưa các ma trận sau về dạng chéo và tìm ma trận chuyển:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**5.13** Chứng tỏ rằng ta không chéo hoá được ma trận: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

**5.14** Chứng tỏ rằng các ma trận đồng dạng có cùng phương trình đặc trưng.

**5.15** Có thể chéo hoá trực giao các ma trận sau được không? Nếu được hãy tìm ma trận chuyển tương ứng: $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

**5.16** Cho $X$ là không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$. Xét ánh xạ $f : X^2 \to R$ xác định bởi $f(u,v) = \int_a^b u(t)v(t)dt$ với $u, v \in X$. Chứng tỏ rằng $f$ là dạng song tuyến tính. Nó có đối xứng, có xác định dương không?

**5.17** Cho $X$ là không gian thực $R^3$. Xét ánh xạ $f : X^2 \to R$ xác định bởi:

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \text{ với } x = (x_1, x_2, x_3); y = (y_1, y_2, y_3).$$

Chứng tở rằng $f$ là dạng song tuyến tính và tìm ma trận $A$ của nó trong cơ sở:

$$B = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\} \text{ của } R^3$$

**5.18** Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc và chỉ ra phép biến đổi tương ứng.

$a)\, Q(x) = {x_1}^2 - {x_2}^2 + 2x_1x_2\sqrt{3};$

$b)\, Q(x) = 2{x_1}^2 + 4{x_2}^2 + {x_3}^2 + 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$

$c)\, Q(x) = 6{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3$

**5.19** Tìm dạng của đường có phương trình:

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2(1+\sqrt{3})x - 2(1-\sqrt{3})y + 2.$$

*CHƯƠNG 6*

# HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

## §1. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Các đại lượng mà ta gặp trong thực tế thường là các đại lượng biến thiên, nghĩa là chúng nhận các giá trị thay đổi trong quá trình khảo sát. Có thể xảy ra trường hợp một đại lượng tuy biến thiên nhưng giá trị của nó lại phụ thuộc vào một đại lượng biến thiên khác. Thí dụ một chiếc xe ô tô chạy trên đường với vận tốc không đổi. Quãng đường xe chạy được (đại lượng biến thiên $s$) phụ thuộc vào thời gian chạy xe (đại lượng biến thiên $t$). Nếu tốc độ của xe là $v$ thì quãng đường $s$ được xác định theo thời gian $t$ bởi công thức $s = vt$. Nếu biết $t$ thì ta xác định được giá trị của $s$ một cách duy nhất.

Quan hệ phụ thuộc giữa $s$ và $t$ như trên được gọi là quan hệ phụ thuộc hàm số.

### 1.1. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Cho tập hợp số thực $R$. Một ánh xạ $f$ từ $R$ vào $R$ được gọi là một hàm số thực của một biến số thực, hay một hàm số của một biến số. Nói cách khác, với mỗi một biến số thực $x$ ta cho tương ứng với một số thực duy nhất theo một quy tắc $f$ nào đó thì ta nói là ta đã xác định một hàm số $f$.

Phần tử $x$ được gọi là biến số độc lập. Phần tử $y$ tương ứng với $x$ được gọi là giá trị của hàm số tại $x$, ta thường ký hiệu là $f(x)$ và viết $y=f(x)$.

Tập hợp tất cả các số thực $x$ mà ta có thể xác định được $y$ theo quy tắc $f$ đã cho được gọi là miền xác định của hàm số $f$.

Nếu tập hợp $A \subset R$ là miền xác định của hàm số thì tập hợp tất cả các số thực y sao cho $y = f(x)$ với $x \in A$ được gọi là miền giá trị của hàm số (đó chính là tập ảnh của $f$). Hay $\{f(x) : x \in A\}$ là miền giá trị của hàm số.

***Ví dụ:*** Cho hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$ thì miền xác định $A$ của hàm số là tập hợp tất cả các số thực $x$ sao cho $9 - x^2 \geq 0,$ tức là $-3 \leq x \leq 3$. Miền giá trị của hàm số là tập hợp mọi số thực $y$ sao cho $0 \leq y \leq 3$.

### 1.2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Để có một hình ảnh hình học về một hàm số, người ta tìm cách biểu diễn nó trên mặt phẳng toạ độ, tức là một mặt phẳng trên đó có xác định hệ trục toạ độ $Ox,Oy$ (thường là vuông góc).

Với mỗi một $x$ thuộc miền xác định $A$ của hàm số ta cho tương ứng với một điểm có toạ độ $(x,y)$, với $y = f(x)$, thuộc mặt phẳng $Oxy$.

Tập hợp tất cả các điểm $(x,y)$ với mọi $x \in A$ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

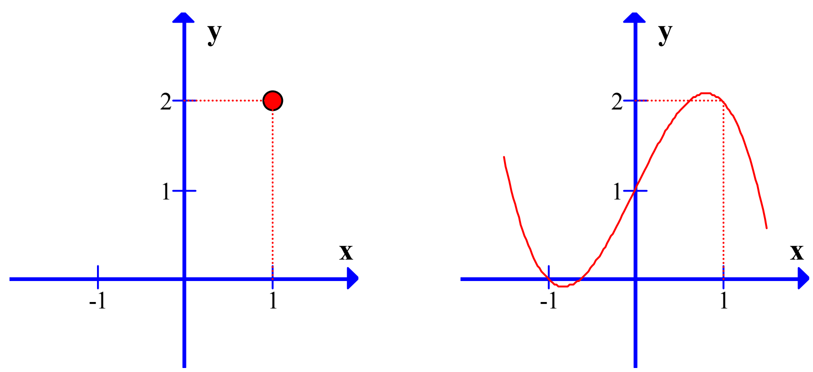
***Ví dụ:*** trong biểu diễn đồ thị của hàm số $f : A \to R$ xác định bởi $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ trong hai trường hợp:

$A = \{-1, 0, 1\}$ (tập hợp $A$ chỉ gồm 3 điểm)

$A = R$ ($A$ là tập hợp các số thực)

Trong trường hợp thứ nhất miền giá trị của hàm cũng chỉ gồm 3 điểm: $y_1 = f(-1) = 0; y_2 = f(0) = 1; y_3 = f(1) = 2$. Do đó đồ thị của hàm số $f$ chỉ có 3 điểm.

Trong trường hợp thứ hai, miền giá trị của hàm là $R$, đồ thị của hàm số là một đường cong liên tục (đó là đường parabol bậc 3 – *hình 8*).




***Hình 8***

## 1.3. HÀM SỐ NGƯỢC VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ NGƯỢC

Xét hàm số $f : A \to B$, tức là với mỗi $x \in A$ tương ứng với một $y$ duy nhất thuộc $B$. Nếu $f$ là song ánh, tức là với mỗi $y \in B$ có tương ứng duy nhất một $x \in A$, thì $f$ sẽ có một ánh xạ ngược là $f^{-1} : B \to A$. Khi đó ta nói $f^{-1}$ là hàm số ngược của hàm $f$. Vậy $f : A \to B \Leftrightarrow f^{-1} : B \to A$

Khi đó trên mặt phẳng toạ độ $Oxy$, nếu điểm M có tọa độ $(x,y)$ với $y = f(x)$ thuộc đồ thị hàm thuận $f$ thì điểm M' có tọa độ $(y,x)$ sẽ thuộc đồ thị hàm số ngược $f^{-1}$. Nếu các đơn vị chọn trên các trục là như nhau thì các điểm

M và M’ sẽ đối xứng với nhau qua đường phân giác $y = x$.

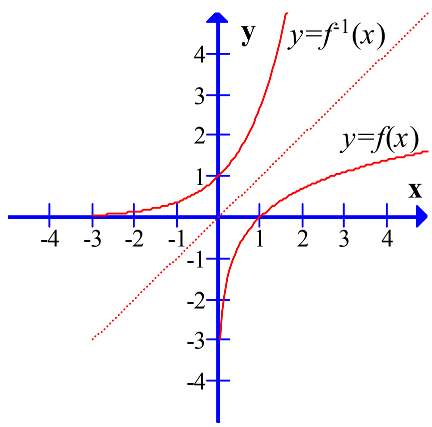
*Đồ thị của hàm $f$ và hàm ngược $f^{-1}$ là đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.*

***Chú ý:*** khi viết hàm ngược của hàm $y = f(x)$ dưới dạng $x = f^{-1}(y)$ thì $y$ là biến số độc lập. Để thuận tiện cho việc trình bày trên cùng một hệ trục toạ độ ta luôn coi biến $x$ là biến độc lập (ứng với trục hoành) còn biến $y$ là biến phụ thuộc (ứng với trục tung). Khi đó ta sẽ ký hiệu hàm ngược của hàm $y = f(x)$ là hàm $y = f^{-1}(x)$.

Ví dụ: hàm $y = 2x + 1$ có hàm ngược là $x = (y-1)/2$, nhưng ta ký hiệu lại là $y = (x-1)/2$. Ta viết:

$$f : R \to R,\ f(x) = 2x + 1$$

$$f^{-1} : R \to R,\ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

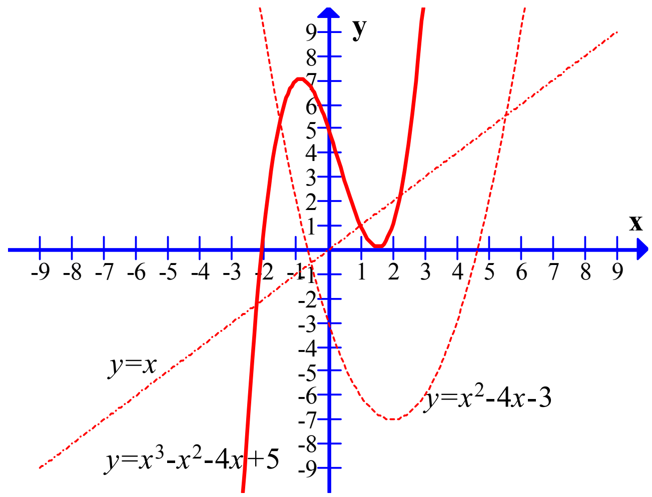



## 1.4. CÁC HÀM SƠ CẤP

### *1.4.1. Hàm đa thức*

Hàm $f : R \to R$ xác định bởi $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, với n là một số nguyên dương, $a_0, ..., a_n$ là các hằng số thực, được gọi là *một hàm đa thức*. Hàm đa thức xác định với mọi số thực $x$ và lấy giá trị thực.

Sau đây là dạng đồ thị của một số hàm đa thức:




### *1.4.2. Hàm phân thức hữu tỷ*

Hàm $f : R \to R$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các hàm đa thức, được gọi là hàm phân thức hữu tỷ.

Nếu $N_0$ là tập các không điểm của $Q(x)$, tức là $N_0 = \{x \in R : Q(x) = 0\}$ thì hàm phân thức hữu tỷ $f(x)$ có miền xác định là tập hợp $R \setminus N_0$.

Trong chương trình trung học ta đã xét đồ thị của các hàm phân thức hữu tỷ: $y = \frac{a}{x}$; $\quad y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

Đồ thị của các hàm phân thức hữu tỷ là đường hypebol.

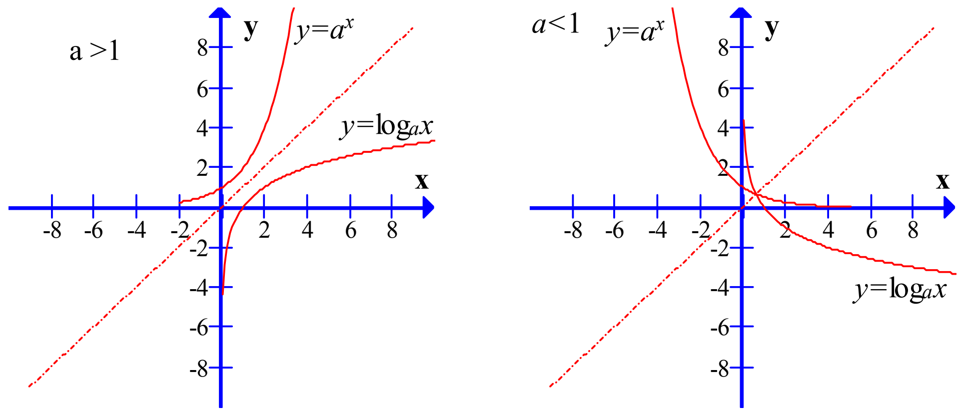
### *1.4.3. Hàm số mũ*

*Hàm số mũ cơ số* $a$ với $a > 0$ và $a \neq 0$ là hàm $f : R \to R^+$ xác định bởi $f(x) = a^x$. Hàm số mũ xác định với mọi số thực $x$ và chỉ lấy giá trị riêng.

Nếu cơ số $a > 1$ thì hàm mũ tăng, nghĩa là: với $x_1 < x_2$ ta có $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Nếu cơ số $a < 1$ thì hàm mũ tăng, nghĩa là: với $x_1 < x_2$ ta có $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Nếu cơ số $a = e$ ($e$ là cơ số vô tỷ và có giá trị gần đúng là 2,71828) thì hàm mũ cơ số $e$ được gọi là hàm exponent, ký hiệu là $\exp(x)$. Vậy $\exp(x) = e^x$.




***Hình 10.*** Đồ thị hàm mũ $y = a^x$ và hàm $y = \log_a x$

Trong việc nghiên cứu sự phát triển của một quần thể sinh vật khi thời gian tăng theo cấp số cộng mà số lượng quần thể tăng theo cấp số nhân, tức là ở thời điểm ban đầu (lúc $t = 0$) số lượng quần thể là $m_0$, lúc $t = 1$ số lượng quần thể là $m_0 q$ ($q$ là một hằng số nào đó, công bội của cấp số nhân), lúc $t = 2$ thì số lượng là $m_0 q^2$,…, ở lúc $t$ thì số lượng quần thể là $m_0 q^t$. Đặt $q = e^{\alpha}, \alpha$ là một hằng số nào đó thì số lượng quần thể $m$ ở thời điểm $t$ sẽ được xác định nhờ hàm mũ:

$$m(t) = m_0 e^{\alpha t} = m_0 \exp(\alpha t)$$

Một hiện tượng phát triển như trên được gọi là phát triển theo luật mũ. Ta thường gặp hiện tượng đó khi xét các quần thể độc lập và những điều kiện hết sức rộng rãi (không bị hạn chế bởi nguồn thức ăn, về địa lý cư trú,…).

### *1.4.4. Hàm logarit*

Nhìn trên đồ thị hàm mũ ta thấy: với mỗi số thực $x$ có tương ứng với một số thực dương $y$ duy nhất và ngược lại với mỗi số thực $y$ có tương ứng với một số thực $x$ duy nhất. Điều đó có nghĩa là hàm mũ là song ánh, do đó nó có hàm ngược.

Ta gọi *hàm ngược của hàm mũ là hàm logarit cơ số* $a$, ký hiệu là $\log_a x$, hàm này xác định trên tập các số thực dương và lấy mọi giá trị thực.

$$f : R^+ \to R,\ f(x) = \log_a x$$

Như vậy các biểu thức sau là tương đương:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, x \in R^+, y \in R$$

Logarit cơ số 10 được gọi là *logarit thập phân*, ký hiệu là $\lg x = \log_{10} x$.

Logarit với cơ số $e$ được gọi là *logarit nêpe hay logarit tự nhiên*, nó được ký hiệu là: $\ln x = \log_e x$

Dùng các tính chất của logarit ta có công thức đổi cơ số trong logarit sau:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Chẳng hạn muốn chuyển từ logarit thập phân sang logarit nêpe ta dùng công thức:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \text{ , với } \lg e \simeq 0{,}4343 \text{ hay } \frac{1}{\lg e} \simeq 2{,}3026$$

Ta đã biết logarit có rất nhiều ứng dụng. Trong việc tính toán, khi ta chuyển các số sang logarit của chúng thì phép tính nhân được thay thế bằng phép tính cộng, phép tính chia được thay bằng phép tính trừ, nhờ vậy rút ngắn được thời gian tính toán.

Khi vẽ đồ thị hàm số người ta thường dùng giấy kẻ ô vuông. Giấy kẻ ô bán logarit là loại giấy kẻ ô mà trên đó thang dùng trên trục $Ox$ (trục hoành) là thang đơn vị độ dài thông thường, còn thang trục tung $Oy$ được ghi theo logarit của đơn vị độ dài, chẳng hạn ở chỗ ghi số 2 ta phải hiểu đó là $\lg 2$. Khi biểu diễn đồ thị hàm mũ $y = e^{\alpha x}$ ta biến đổi nó thành $\lg y = (\alpha \lg e)x$ và dùng giấy kẻ ô bán logarit thì ta sẽ được đồ thị là một đường thẳng. Như vậy để kiểm tra xem giữa hai đại lượng biến thiên $x$ và $y$ có sự phụ thuộc theo quy luật mũ không ta biểu diễn các điểm $(x, \lg y)$ trên giấy kẻ ô bán logarit, nếu các điểm nhận được xấp xỉ thẳng hàng thì ta có thể chấp nhận quy luật mũ giữa $x$ và $y$.

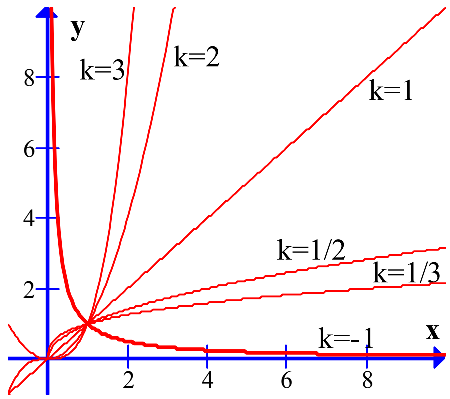
### *1.4.5. Hàm luỹ thừa*

Hàm $f : R \to R$ được xác định bởi $f(x) = x^\alpha$, với $\alpha$ là hằng số thực, được gọi là *hàm luỹ thừa* tuỳ thuộc vào số thực $\alpha$.

Với $\alpha = n$, $n$ là số nguyên dương, thì hàm $y = x^n$ là hàm luỹ thừa nguyên và xác định trên $R$.

Với $\alpha = -n$, $n$ là số nguyên dương, thì hàm $y = x^{-n}$ là hàm luỹ thừa thập phân và nó xác định trên $R \setminus \{0\}$.

Với $\alpha = 1/n$, $n$ là số nguyên dương, thì hàm $y = x^{1/n}$ là hàm căn thức, nó xác định trên $R^+$ nếu $n$ chẵn và trên tập $R$ nếu $n$ lẻ.




Hình 12. Hàm luỹ thừa $y = x^k$ với giá trị $k$ khác nhau.

*Chú ý:* Khi nghiên cứu sự phụ thuộc giữa hai đại lượng biến thiên $x$ và $y$, nếu giữa chúng có hệ thức $y = bx^k$ thì bằng phép biến đổi logarit ta được:

$$\lg y = \lg b + k \lg x$$

nếu đặt $Y = \lg y, X = \lg x, B = \lg b$ thì ta có:

$$Y = kX + B$$

đây lại là một đường thẳng trong hệ toạ độ nếu cả hai trục có thang logarit.

### *1.4.6. Các hàm lượng giác*

Trong chương trình trung học ta đã định nghĩa các hàm lượng giác.

Các hàm $y = \sin x, y = \cos x$ xác định trên tập số thực $R$ và lấy giá trị trong $[-1,1]$.

Hàm $y = \operatorname{tg} x$ xác định với mọi giá trị $x \neq (2k+1)\pi / 2$.

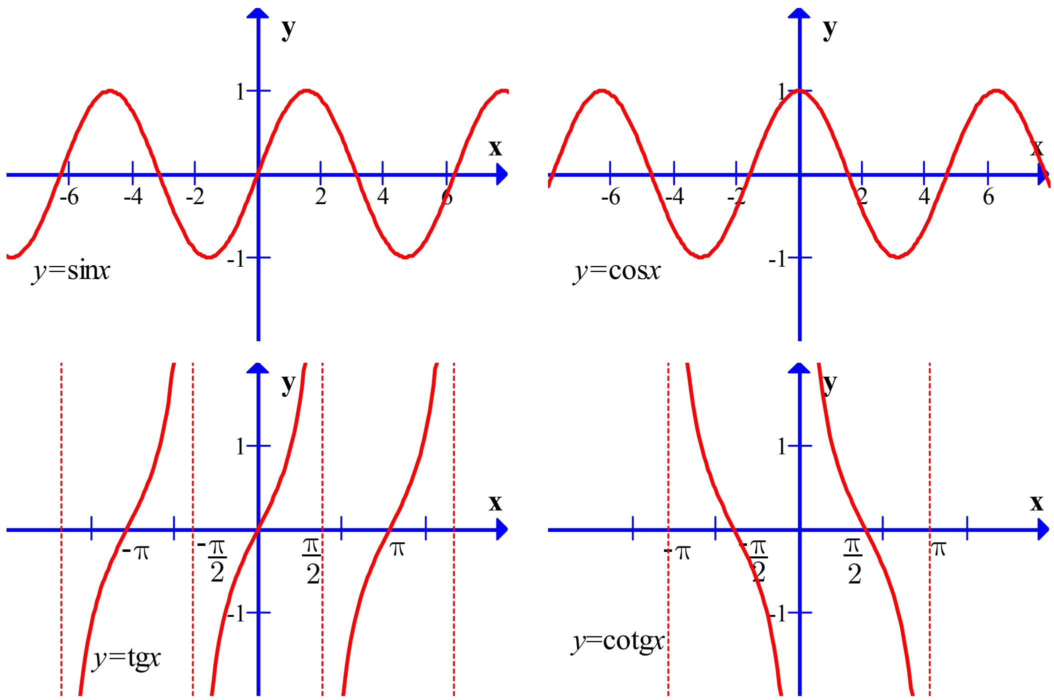
Hàm $y = \operatorname{cotg} x$ xác định với mọi giá trị $x \neq k\pi$, chúng lấy các giá trị thực.

Các hàm $y = \sin x, y = \cos x$ là các hàm tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$, nghĩa là:

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x,\ \cos(2k\pi + x) = \cos x,\ \forall k \in Z, \forall x$$

Các hàm $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $\pi$.

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$$




Hình 13. Đồ thị các hàm lượng giác.

### *1.4.7. Các hàm lượng giác ngược*

Hàm $y = \sin x$ xét trên $R$ không là đơn ánh (do nó tuần hoàn), do đó nó không là song ánh. Tuy nhiên, nếu ta hạn chế miền xác định của nó trên khoảng $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì nó là song ánh, nó có hàm ngược là $f^{-1}$, ta gọi hàm ngược của nó là hàm arcsin.

$$f^{-1} : [-1,\ 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ f^{-1}(x) = \arcsin x$$

như vậy ta có:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$-1 \le x \le 1;\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Tương tự, hàm $f : [0, \pi] \to [-1,\ 1],\ f(x) = \cos x$ là song ánh, hàm ngược của nó là: $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi],\ f^{-1}(x) = \arccos x$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$-1 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \pi$$

Hàm $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to R,\ f(x) = \operatorname{tg} x$ cũng là song ánh, nó có hàm ngược là:

$$f^{-1} : R \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$

Hàm song ánh $f:(0,\pi)\to R,\ f(x)=\operatorname{cotg}x$ có ánh xạ ngược là:

$$f:R\to(0,\pi),\ f^{-1}(x)=\operatorname{arccotg}x$$

Vậy ta có:

$$y=\operatorname{arctg}x \Leftrightarrow x=\operatorname{tg}y \qquad y=\operatorname{arc\,cotg}x \Leftrightarrow x=\operatorname{cotg}y$$

$$-\infty<x<+\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \qquad -\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi$$

Đồ thị của các hàm lượng giác ngược được vẽ bằng cách lấy đối xứng qua đường phân giác $y=x$ đồ thị các hàm lượng giác tương ứng thuộc miền xác định hạn chế của chúng.

Các hàm số luỹ thừa, hàm mũ, hàm logarit, các hàm lượng giác và các hàm ngược của chúng được gọi là các *hàm sơ cấp cơ bản*. Hàm số được tạo từ các hàm số sơ cấp cơ bản nhờ các phép tính đại số và phép hợp hàm được gọi là *hàm số sơ cấp*.

***Ví dụ:*** các hàm đa thức, các hàm hữu tỷ là các hàm sơ cấp;

$A\sin(\alpha x+\beta), e^{ax}\sin x, e^{x^2-x}\cos(ax+b),\ldots$ cũng là các hàm sơ cấp.

## 1.5. HÀM CHO BẰNG THAM SỐ

Khi nghiên cứu sự phụ thuộc hàm số giữa hai đại lượng $x$ và $y$ ta cũng hay gặp trường hợp cả $x$ và $y$ đều phụ thuộc vào một biến thứ ba $t$.

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (*)$$

Khi đó với mỗi $t$ ta xác định được một điểm $(x,y)$ thuộc mặt phẳng, khi $t$ thay đổi (trong miền xác định của các hàm $\varphi,\psi$) thì điểm $(x,y)$ vạch nên một đường L nào đó. Cặp phương trình (*) được gọi là phương trình tham số của đường L.

***Ví dụ:*** Cặp phương trình $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\le t\le 2\pi$ biểu diễn đường elip, vì khi khử tham số $t$ ta được:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

Bây giờ ta xét xem cặp phương trình (*) khi nào biểu diễn hàm $y=f(x)$.

Giả sử các hàm $\varphi,\psi$ xác định trong miền $G$. Khi đó miền xác định của hàm $f(x)$ là tập hợp mọi giá trị của hàm $x=\varphi(t), t\in G,$ tức là $D=\varphi(G)$. Nếu hàm $y$ là song ánh thì với mỗi $x\in D$ ta tìm được duy nhất một $t\in G,$

$t = \varphi^{-1}(x)$, và với $t$ đó ta xác định được một $y$ duy nhất theo hàm $y = \psi(t)$.

Như vậy, nếu hàm $\varphi, \psi$ xác định trong miền $G$ và $\varphi$ là song ánh trên $G$ thì: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in G$ biểu diễn một hàm số. Ta gọi hàm số đó cho bằng tham số.

Phương trình đường elip nói trên $x = a\cos t, y = b\sin t$ biểu diễn hai hàm:

Với $0 \le t \le \pi,$ hàm $x = a\cos t$ là một song ánh. Ta có hàm:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Với $\pi \le t \le 2\pi$ ta có hàm: $\quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

# §2. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

## 2.1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

*Một hàm $f : N \to R$ xác định trong tập hợp các số tự nhiên $N$ được gọi là một dãy số.*

Ta đặt $u_1 = f(1), u_2 = f(2), ..., u_n = f(n), ...$ số $u_n$ được gọi là *số hạng tổng quát* của dãy số. Ta ký hiệu dãy số là $\{u_n\}$. Có thể xác định dãy số bằng cách:

*a) Cho công thức tổng quát:* $u_n = f(n)$

***Ví dụ:*** Cho dãy số $u_n = a.q^{n-1}$, với $a$ và $q$ là các hằng số. Đó chính là một dãy số nhân $a, aq, aq^2, ..., aq^n, ...$

*b) Cho công thức truy chứng,* chẳng hạn: $u_1 = a, u_n = f(u_{n-1})$

***Ví dụ 1:*** Cho dãy số $u_1 = \sqrt{2},\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$. Đó là dãy

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...$$

***Ví dụ 2:*** Cho dãy số Fibonasi $u_1 = u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Đó là dãy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…

## 2.2. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Ví dụ mở đầu: Xét số thực $a = 1/3$. Ta có thể biểu diễn gần đúng thiếu số $a$ bằng dãy số: $u_1 = 0,3;\ u_2 = 0,33; ...;\ u_n = 0,3...3$ ($n$ số 3), hoặc biểu diễn gần đúng thừa bằng dãy số $v_1 = 0,4;\ v_2 = 0,34; ....;\ v_n = 0,3...34$ ($n-1$ số 3).

Ta nhận xét rằng hiệu $u_n - a$ hoặc $v_n - a$ về trị tuyệt đối không vượt quá $10^{-n}$. Bằng cách tăng n ta có thể làm cho hiệu đó nhỏ đi bao nhiêu cũng được. Điều đó có nghĩa là nếu $\varepsilon$ là một số dương cho trước, bé tùy ý, thì ta có thể tìm được số nguyên $N$ sao cho với mọi $n > N$ ta luôn có $| u_n - a |< \varepsilon$. Khi đó số $a$ được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$.

***Định nghĩa:*** *dãy số $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn là a nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có thể tìm được một số $N > 0$ sao cho với mọi $n > N$ ta luôn có:*

$$| u_n - a |< \varepsilon$$

Ta ký hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$

Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $a$ thì ta cũng nói dãy $\{u_n\}$ ***hội tụ*** tới $a$.

***Ví dụ:*** xét dãy số cho bởi $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

Ta thấy rằng dãy số đó hội tụ tới 1 vì $| u_n - 1 |= \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$.

Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, muốn có $| u_n - 1 |< \varepsilon$ thì chỉ việc lấy $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ là được. Như vậy ta chọn $N$ là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Chẳng hạn nếu cho $\varepsilon = 0,003$ thì $\dfrac{1}{\varepsilon} = 333,3$. Ta chỉ việc lấy $N$ =333 thì với mọi $n > 333$ (tức là kể từ số hạng thứ 334 trở đi) ta có $| u_n - 1 |< 0,003$.

## 2.3. CÁC PHÉP TÍNH VỀ DÃY HỘI TỤ

***Định lý:*** *nếu dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới $a$, dãy $\{v_n\}$ hội tụ tới $b$ thì*

*1) Dãy tổng $\{u_n + v_n\}$ hội tụ tới $a + b$*

*2) Dãy tích $\{u_n.v_n\}$ hội tụ tới $a.b$*

*3) Dãy nghịch đảo $\{1 / v_n\}$ hội tụ tới $1 / b$ với điều kiện $b \neq 0$*

*4) Dãy thương $\{u_n / v_n\}$ hội tụ tới $a / b$ với điều kiện $b \neq 0$*

Ta sẽ chứng minh cho tính chất (1), các tính chất còn lại được chứng minh tương tự.

Vì $u_n \to a$ nên theo định nghĩa của giới hạn, cho trước số $\varepsilon / 2$ ta tìm được số $N_1$ sao cho với mọi $n > N_1$ ta có $| u_n - a |< \varepsilon / 2$. Vì $v_n \to b$ nên với số $\varepsilon / 2$ nói trên ta tìm được số $N_2$ sao cho với mọi $n > N_2$ ta có $| v_n - a |< \varepsilon / 2$.

Gọi $N = \max(N_1, N_2)$ thì với mọi $n > N$ ta có:

$$| u_n - a | < \varepsilon / 2 \text{ và } | v_n - a | < \varepsilon / 2$$

Khi đó với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước ta đã tìm được số $N$ sao cho với mọi $n > N$ ta có:

$$| (u_n + v_n) - (a + b) | = | (u_n - a) + (v_n - b) | \leq | u_n - a | + | v_n - b) | \leq \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

Điều đó chứng tỏ $(u_n + v_n) \to (a + b)$.

## 2.4. HAI TIÊU CHUẨN ĐỦ ĐỂ DÃY HỘI TỤ

Không phải dãy số nào cũng hội tụ, chẳng hạn dãy $u_n = (-1)^n$ mà các giá trị của nó lần lượt là -1 và 1 không tiến tới một giới hạn nào cả.

Dưới đây ta sẽ phát biểu hai tiêu chuẩn mà nhờ đó ta có thể biết được một dãy đã cho là hội tụ.

***Tiêu chuẩn 1:*** *Cho ba dãy* $\{u_n\}, \{v_n\}$ và $\{w_n\}$ *sao cho*

$$v_n \leq u_n \leq w_n \tag{1}$$

*Khi đó nếu các dãy* $\{v_n\}$ và $\{w_n\}$ *cùng hội tụ tới* $a$ *thì dãy* $\{u_n\}$ *cũng hội tụ tới* $a$.

Chứng minh:

Do $v_n \to a$ nên với $\varepsilon > 0$ ta tìm được $N_1$ để $\forall n > N_1$ ta có $| v_n - a | < \varepsilon$ (2)

Do $w_n \to a$ nên với $\varepsilon > 0$ ta tìm được $N_2$ để $\forall n > N_2$ ta có $| w_n - a | < \varepsilon$ (3)

Gọi $N = \max(N_1, N_2)$ thì khi $n > N$ các bất đẳng thức (2) và (3) cùng xảy ra. Kết hợp với (1) ta có: $-\varepsilon < v_n - a \leq u_n - a \leq w_n - a < \varepsilon$

Như vậy, với $\varepsilon > 0$ cho trước ta tìm được số $N$ sao cho với mọi $n > N$ ta có:

$$| u_n - a | < \varepsilon$$

Điều đó chứng tỏ dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới $a$. ■

Trước khi phát biểu tiêu chuẩn thứ hai, ta xét thêm một vài khái niệm:

*Dãy* $\{u_n\}$ *được gọi là đơn điệu tăng nếu* $\forall n, m$ và $n > m$ ta luôn có $u_n > u_m$.

*Dãy* $\{u_n\}$ *được gọi là đơn điệu giảm nếu* $\forall n, m$ và $n > m$ ta luôn có $u_n < u_m$.

***Ví dụ:*** dãy cho bởi $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ là dãy tăng, dãy cho bởi $v_n = \dfrac{1}{n}$ là dãy giảm.

*Dãy $\{u_n\}$ được gọi là **bị chặn trên** nếu mọi số hạng trong dãy, kể từ một số hạng nào đó trở đi, không vượt quá một hằng số $A$ nào đó.*

*Dãy $\{u_n\}$ được gọi là **bị chặn dưới** nếu mọi số hạng trong dãy, kể từ một số hạng nào đó trở đi, không nhỏ hơn một hằng số $B$ nào đó.*

***Tiêu chuẩn 2:*** *mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ. Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.*

Ta không chứng minh tiêu chuẩn này.

Ví dụ: xét dãy số cho bởi $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên.

thật vậy, ta khai triển $u_n$ theo nhị thức Newton:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Thay $n$ bởi $n+1$ thì:

$$u_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Do: $1-\dfrac{1}{k} < 1-\dfrac{1}{k+1}$ với mọi $k = 1,2,\dots$ ta suy ra $u_n < u_{n+1}$, tức là dãy $\{u_n\}$ tăng.

Mặt khác: $1-\dfrac{1}{k} < 1, \forall k$ nên $u_n < 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots + \dfrac{1}{n!}$

Hơn nữa: $\dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{2.3\dots k} < \dfrac{1}{2.2\dots 2} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$, $\forall k = 2,3,\dots$

Do đó: $u_n < 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}} < 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dots$

Tổng $2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dots = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$ vì là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

Vậy $u_n < 3$.

Tóm lại dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 3 nên theo tiêu chuẩn 2 thì nó hội tụ.

***Định nghĩa:*** *Giới hạn của dãy* $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *được gọi là số* $e$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Người ta chứng minh được rằng số $e$ là số vô tỷ. Giá trị gần đúng của nó với 5 chữ số thập phân là 2,71828. Số $e$ được dùng làm cơ số cho một hệ logarit (logarit nêpe). Rất nhiều công thức toán học cũng như kỹ thuật được biểu diễn nhờ số $e$.

## 2.5. GIỚI HẠN VÔ CÙNG CỦA DÃY

Khi xét dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới $a, a$ là hữu hạn ($-\infty < a < +\infty$). Có những dãy mà kể từ một số hạng nào đó trở đi, mọi số hạng trong dãy đều lớn hơn hoặc nhỏ hơn một số bất kỳ cho trước có trị tuyệt đối lớn tùy ý. Khi đó ta nói là dãy có giới hạn vô cùng.

***Định nghĩa:***

*Dãy* $\{u_n\}$ *có giới hạn* $+\infty$ *nếu với mọi số* $M>0$ *cho trước, ta có thể tìm được số* $N>0$ *sao cho với mọi* $n>N$ *ta có* $u_n > M$. Ta viết $u_n \to +\infty$.

*Dãy* $\{u_n\}$ *có giới hạn* $-\infty$ *nếu với mọi số* $M>0$ *cho trước, ta có thể tìm được số* $N>0$ *sao cho với mọi* $n>N$ *ta có* $u_n < -M$. Ta viết $u_n \to -\infty$.

***Ví dụ:*** dãy số cho bởi $u_n = n^2$ có giới hạn là $+\infty$.

Ta chứng minh được rằng:

Nếu $u_n \to +\infty, v_n \to +\infty$ thì $u_n + v_n \to +\infty$; $u_n.v_n \to +\infty$

Nếu $u_n \to -\infty, v_n \to -\infty$ thì $u_n + v_n \to -\infty$; $u_n.v_n \to +\infty$

Nếu $u_n \to +\infty, v_n \to -\infty$ thì $u_n.v_n \to -\infty$

Nếu $u_n \to a > 0, v_n \to +\infty$ thì $u_n.v_n \to +\infty$

***Chú ý:*** Nếu $u_n \to +\infty, v_n \to +\infty$ thì hiệu $(u_n - v_n)$, thương $\frac{u_n}{v_n}$ được gọi là các dạng vô định. Nếu $u_n \to 0, v_n \to \infty$ thì $u_n.v_n$ cũng là dạng vô định.

Trong việc tính giới hạn, khi gặp các dạng vô định ta phải tìm cách khử chúng đi (xem §3).

# §3. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

## 3.1. ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN KHI $x \to a$

***Ví dụ:*** xét hàm số $f(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$

Hàm số không xác định tại $x = 1$. Tuy nhiên với các giá trị của $x$ khá gần 1 ta thấy các giá trị của $f(x)$ tương ứng khác 4 rất ít và ta có thể tìm được những khoảng đủ nhỏ chứa 1 sao cho với mọi $x$ thuộc khoảng đó thì hiệu $|f(x)-4|$ nhỏ bao nhiêu cũng được. Khi đó ta nói hàm $f(x)$ có giới hạn là 4 khi $x$ dần tới 1.

***Định nghĩa:*** *hàm $f(x)$ có giới hạn là $h$ khi $x$ dần tới $a$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ sao cho*

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ để } \forall x : 0 < |x-a| < \delta \text{ thì } |f(x)-h| < \varepsilon$$

(*tồn tại một số $\delta$ dương chỉ phụ thuộc vào $\varepsilon$ mà với mọi $x$ thuộc lân cận $\delta$ của điểm $a$ thì* $|f(x)-h| < \varepsilon$)

Ta ký hiệu: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = h$

Trở lại ví dụ trên, ta chứng minh rằng: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2(x^2-1)}{x-1} = 4$

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ bất kỳ (chẳng hạn $\varepsilon = 0,001$) ta cần xác định số $\delta > 0$ sao cho khi:

$$0 < |x-1| < \delta \text{ thì } \left|\frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4\right| < \varepsilon$$

Do $x \neq 1$ nên $\left|\dfrac{2(x^2-1)}{x-1} - 4\right| = |2(x+1)-4| = 2|x-1| < 2\delta$

nếu chọn $\delta = \varepsilon/2$ thì ta có $\left|\dfrac{2(x^2-1)}{x-1} - 4\right| < 2\delta = \varepsilon$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon/2, \forall x : 0 < |x-1| < \delta$ thì ta có $|f(x)-4| < \varepsilon$.

## 3.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA GIỚI HẠN

***Định lý 1:*** *nếu hàm $f(x) \geq 0$ trong một lân cận của điểm $a$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = h$ thì $h \geq 0$.*

Thậy vậy, từ định nghĩa của giới hạn ta có:

$$| f(x) - h | < \varepsilon \Rightarrow h - \varepsilon < f(x) < h + \varepsilon$$

nếu $h < 0$ thì ta có thể chọn $\varepsilon$ sao cho $h + \varepsilon < 0$ khi đó $f(x) < 0$, trái giả thiết.

***Định lý 2:*** *nếu khi $x \to a, f(x)$ có giới hạn $h$ và $g(x)$ có giới hạn là $k$ thì $f(x) + g(x)$ có giới hạn $h + k$; $m.f(x)$ có giới hạn là $h.m$ ($m$ là hằng số); $f(x).g(x)$ có giới hạn là $h.k$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có giới hạn là $\dfrac{1}{m}$ $(m \neq 0)$.*

Cách chứng minh định lý này cũng giống như cách chứng minh giới hạn của dãy số.

***Chú ý:*** các định nghĩa giới hạn của hàm $f$ khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$ cũng tương tự như định nghĩa giới hạn của dãy. Chẳng hạn, *hàm $f(x)$ có giới hạn là $h$ khi $x \to -\infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ ta tìm được số $M > 0$ sao cho $\forall x < -M, \left| f(x) - h \right| < \varepsilon$.*

### 3.3. LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ (VCB)

*Nếu $f(x)$ có giới hạn bằng 0 khi $x \to a$ thì hàm $f(x)$ được gọi là lượng* ***vô cùng bé*** *ở lân cận của $a$.*

***Ví dụ:*** khi $x \to 0$ thì $\sin x \to 0$ (do ta luôn có $| \sin x | < | x |$). Vậy $\sin x$ là đại lượng vô cùng bé (VCB) ở lân cận của 0.

***So sánh các VCB:*** *giả sử $f(x), g(x)$ là các VCB khi $x \to a$.*

*Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì ta nói rằng $f$ là VCB cấp cao hơn $g$.*

*Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ thì ta nói rằng $f$ và $g$ là VCB cùng cấp.*

*đặc biệt, nếu $k = 1$ thì $f$ và $g$ là hai VCB tương đương, ta ký hiệu $f \sim g$.*

***Ví dụ:*** ở chương trình Trung học ta đã biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Như vậy trong lân cận của 0 thì ta có: $\sin x \sim x$

Ta có: $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}.\sin\frac{x}{2} = 0$$

Vậy: 1-cos*x* là VCB cấp cao hơn $x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}}{x}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

Vậy $1-\cos x$ là VCB cùng cấp với $x^2$, ta cũng nói $1-\cos x$ là VCB cấp hai đối với $x$.

***Chú ý:*** tỷ số của hai VCB $\dfrac{f}{g}$ $(x \to a$ hoặc $\infty)$ là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Định lý sau cho ta một phương pháp để *khử dạng vô định*.

***Định lý:*** *giả sử $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ là các VCB (khi $x \to a$ hoặc $\infty$). Khi đó nếu $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$ thì:* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$.

*Chứng minh*: Ta có thể viết

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{f_2}{g_2} \cdot \frac{g_2}{g_1}$$

Do $\lim \dfrac{f_1}{f_2} = 1,\ \lim \dfrac{g_2}{g_1} = 1$ nên ta có: $\lim \dfrac{f_1}{g_1} = \lim \dfrac{f_2}{g_2}$.

***Ví dụ:***

1) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

Khi $x \to 0$ thì $\sin 5x \sim 5x,\ \sin 3x \sim 3x$. Theo định lý trên ta có:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

2) Tìm $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$

Khi $x \to \pi$ thì $\sin 5x \to 0$, tức là $\sin 5x$ là một VCB. Tuy nhiên, ta không thể viết $\sin 5x \sim 5x$ vì $5x \to 5\pi$ không phải là một VCB. Để giải quyết vấn đề này ta làm như sau:

Đặt $t = \pi - x$. Khi $x \to \pi$ thì $t \to 0$, $\sin 5x = \sin(5\pi - 5t) = \sin(\pi - 5t) = \sin 5t$ và $\sin 2x = \sin(2\pi - 2t) = \sin(-2t) = -\sin 2t$. Khi đó nếu $t \to 0$ thì $\sin 5t \sim 5t$ và $\sin 2t \sim 2t$. Vậy:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 5t}{-\sin 2t} = \lim_{t \to 0} \frac{5t}{-2t} = -\frac{5}{2}$$

Một số VCB tương đương thường gặp:

Khi $x \to 0$ thì:

$$\sin x \sim x;\ \operatorname{tg} x \sim x;\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x;\ e^x - 1 \sim x;\ \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$$

Ta chứng minh: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Ở mục 2.4 ta đã định nghĩa: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

Với số thực $z$ bất kỳ bao giờ ta cũng tìm được số $n$ sao cho: $n\le z\le n+1$

Từ đó:

$$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{z}\le\frac{1}{n}\Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}\le 1+\frac{1}{z}\le 1+\frac{1}{n}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Vậy:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\le\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Khi $z\to+\infty$ thì $n\to+\infty$ và ta có:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to e;\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$$

Còn: $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1}\to 1;\quad\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\to 1$

Do đó theo tiêu chuẩn 1 của giới hạn (nhưng áp dụng đối với hàm) ta có:

$\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$, với $z$ là một số thực.

Đặt $x=1/z$ thì khi $z\to+\infty,\ x\to 0$. Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Ta có: $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

Đặt $y=e^x-1$ thì $x=\ln(1+y)$, khi $x\to 0$ thì $y\to 0$. Khi đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$$

## 3.4. LƯỢNG VÔ CÙNG LỚN (VCL)

*Hàm $f$ có giới hạn $+\infty$ khi $x\to a$ nếu với mọi $M>0$ ta tìm được số $\delta>0$ sao cho khi $0<|x-a|<\delta$ thì $f(x)>M$.*

*Hàm $f$ có giới hạn $-\infty$ khi $x\to a$ nếu với mọi $M>0$ ta tìm được số $\delta>0$ sao cho khi $0<|x-a|<\delta$ thì $f(x)<-M$.*

Bạn đọc hãy tự định nghĩa giới hạn vô cùng ($+\infty$ hoặc $-\infty$) của hàm $f$ khi $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

*Nếu hàm $f$ có giới hạn là vô cùng thì nó được gọi là* ***lượng vô cùng lớn***.

Ta dễ dàng chứng minh được là: nếu $f(x)$ là VCB khác 0 thì $1/f(x)$ là một VCL và ngược lại, nếu $f(x)$ là VCL khác 0 thì $1/f(x)$ là VCB.

Nếu $f, g$ là các VCL và tỷ số $f/g$ cũng là VCL thì $f$ là VCL có cấp cao hơn $g$. Vì vậy, *trong việc tính giới hạn của tỷ số $f/g$ (dạng vô định $\infty/\infty$) ta chỉ giữ lại ở tử số và mẫu số các VCL có cấp cao nhất và ngắt bỏ các VCL cấp thấp hơn đi.*

***Ví dụ:*** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x^2-3x}{4x^3-7x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{4x^3}=\frac{1}{2}$$

# §4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong §3 ta đã xét giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ mà không đòi hỏi hàm $f$ phải xác định tại $a$. Trong mục này ta sẽ xét một lớp hàm đặc biệt, hay gặp trong thực tế: hàm $f$ xác định tại $a$, hàm $f$ có giới hạn khi $x \to a$ và giá trị giới hạn đó bằng giá trị của hàm tại $a$. Đó là lớp các hàm số liên tục.

## 4.1. ĐỊNH NGHĨA

*Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = a$ nếu: nó xác định tại $a$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

***Ví dụ:*** hàm $f(x) = x^2$ liên tục tại mọi điểm $x$. Thật vậy, lấy $x = a$ bất kỳ thì $f(a) = a^2$ và $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$, điều này có nghĩa là hàm $f$ liên tục tại $a$. Nhưng $a$ được chọn bất kỳ nên hàm $f$ liên tục tại mọi điểm.

Dùng các định lý về giới hạn ta chứng minh được:

***Định lý 1:*** *nếu các hàm $f(x), g(x)$ liên tục tại $x = a$ thì các hàm $f(x) + g(x)$, $k.f(x)$ với $k$ là hằng số, $f(x).g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $g(a) \neq 0$ cũng liên tục tại $a$.*

Bây giờ ta xem xét tính liên tục của hàm hợp:

Trước tiên ta xem lại khái niệm hàm hợp. Giả sử có hai hàm:

$u : A \to B,\ u(x) = y$

$f : B \to C,\ f(y) = z$

Như vậy ta có hàm hợp: $f \circ u : A \to C$, $(f \circ u)(x) = f(u(x))$

***Định lý 2:*** *nếu hàm u liên tục tại $x = a$, hàm f liên tục tại điểm $u_0 = u(a)$ thì hàm hợp $f \circ u$ cũng liên tục tại $x = a$.*

Chứng minh:

Do $f$ liên tục tại $u_0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta tìm được số $\eta > 0$ sao cho: $|u - u_0| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$ (1)

Do hàm $u$ liên tục tại $a$ nên với $\eta > 0$ tìm được ở trên ta tìm được $\delta > 0$ sao cho: $|x - a| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(a)| = |u - u_0| < \eta$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |u - u_0| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$$

hay: $|f[u(x)] - f[u(a)]| < \varepsilon$

Điều đó chứng tỏ $\lim\limits_{x \to a} f[u(x)] = f[u(a)]$. Tức là hàm hợp $f \circ u$ liên tục tại $x = a$. ■

Ta thừa nhận rằng: *các hàm sơ cấp cơ bản liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của chúng.*

Dùng định lý 1 và định lý 2 ta có thể phát biểu: *các hàm sơ cấp đều liên tục trong miền xác định của chúng.*

## 4.2. HÀM LIÊN TỤC TRONG MỘT KHOẢNG KÍN

### *4.2.1. Liên tục một phía*

Trong định nghĩa giới hạn, khi ta viết $x \to a$ ta cần hiểu là $x$ dần tới $a$ theo những giá trị nhỏ hơn $a$ ($x$ dần tới $a$ theo phía trái, ký hiệu $x \to a - 0$ hoặc $x \to a^-$) và $x$ dần tới *a* theo những giá trị lớn hơn $a$ ($x$ dần tới $a$ theo phía phải, ký hiệu $x \to a + 0$ hoặc $x \to a^+$).

Giới hạn của hàm f khi $x \to a$ như vậy là *giới hạn hai phía.*

Trong nhiều trường hợp, ta chỉ cần xét giới hạn của hàm khi $x \to a - 0$, ta có *giới hạn trái*, hoặc khi $x \to a + 0$, ta có *giới hạn phải*.

***Ví dụ:*** với hàm $f(x) = \sqrt{x}$ thì khi xét giới hạn của nó khi $x \to 0$ ta chỉ có thể xét giới hạn phải, vì nếu xét giới hạn trái thì vô nghĩa (vì hàm $\sqrt{x}$ chỉ xác định với $x \geq 0$).

*Hàm f được gọi là liên tục trái tại $a$ nếu nó xác định tại $a$ và*

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. *Hàm $f$ được gọi là liên tục phải tại $a$ nếu nó xác định tại $a$ và* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

*Hàm $f$ được gọi là liên tục tại $a$ nếu nó liên tục cả phía trái và cả phía phải tại $a$.*

### *4.2.2. Hàm liên tục trên khoảng kín* $[a,b]$

*Một hàm $f$ được gọi là liên tục trên khoảng kín $[a,b]$ nếu:*

*Nó liên tục tại mọi điểm $x \in (a,b)$.*

*Nó liên tục phải tại $a$ và liên tục trái tại $b$.*

Khi biểu diễn đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng thì ta được một đường cong liền nét (vẽ được bằng một nét bút).

Ta phát biểu không chứng minh mà chỉ minh hoạ bằng hình học các tính chất quan trọng của hàm liên tục trên một khoảng kín.

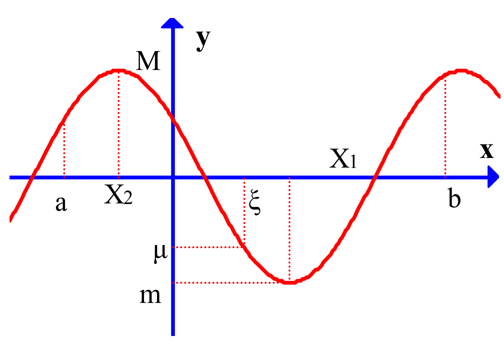
***Tính chất 1:*** *nếu hàm $f$ liên tục trên khoảng kín $[a,b]$ thì nó đạt giá trị nhỏ nhất $m$ và giá trị lớn nhất $M$ ít nhất một lần trên khoảng $[a,b]$.*

Nói cách khác, tồn tại $x_1 \in [a,b]$ và $x_2 \in [a,b]$ sao cho với mọi $x \in [a,b]$ ta có $m = f(x_1) \leq f(x)$; $M = f(x_1) \geq f(x)$.

Chú ý rằng điều kiện khoảng kín là quan trọng, chẳng hạn nếu xét hàm $f(x) = x$ liên tục trong khoảng mở (0,1) thì không tìm được điểm trong (0,1) để hàm $f$ đạt giá trị nhỏ nhất cũng như giá trị lớn nhất.

***Tính chất 2:*** *nếu hàm $f$ liên tục trong khoảng kín $[a,b]$ thì nó nhận mọi giá trị trong khoảng kín $[m,M]$, tức là ảnh của đoạn $[a,b]$ qua $f$ là $[m,M]$.*

Nói cách khác, nếu $\mu$ là một giá trị tuỳ ý thuộc khoảng kín $[m,M], m \leq \mu \leq M$ thì thế nào cũng tìm được $\xi \in [a,b]$ để $f(\xi) = \mu$ (hình 15).



***Hình 15***

***Hệ quả:*** *nếu hàm $f$ liên tục trên khoảng kín $[a,b]$, giá trị của hàm tại $a$ và $b$ trái dấu nhau, tức là $f(a).f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ bao giờ cũng có nghiệm trong khoảng $(a,b)$. Hơn nữa, nếu $f$ đơn điệu trong khoảng $[a,b]$ thì nghiệm đó là duy nhất.*

Ta chỉ việc áp dụng tính chất 2 với $m < 0, M > 0, \mu = 0$.

## 4.3. HÀM SỐ GIÁN ĐOẠN

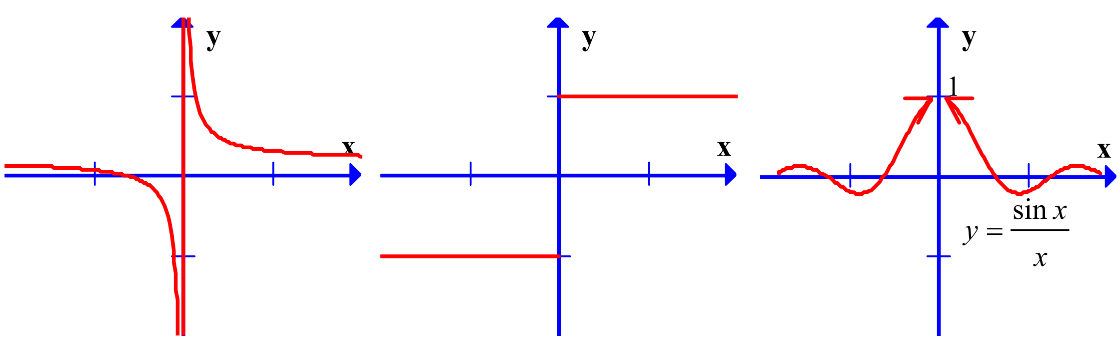
Nếu hàm $f$ không liên tục tại $x = a$ thì điểm $x = a$ là điểm gián đoạn của hàm số. Ta cũng nói hàm số gián đoạn tại $a$. Các trường hợp gián đoạn thường gặp là:

Hàm $f$ không xác định tại $a$ và $f(x) \to \infty$ khi $x \to a$. Điểm $x = a$ được gọi là điểm gián đoạn vô cùng.

***Ví dụ:*** hàm $f(x) = 1/x$ có gián đoạn vô cùng tại $x = 0$.

Hàm $f$ xác định tại $x = a$, hàm có các giới hạn trái (hữu hạn) và giới hạn phải tại $a$ nhưng các giới hạn đó không bằng nhau. Khi đó ta nói hàm có gián đoạn loại một tại điểm $x = a$, và tại $x = a$ hàm $f$ có bước nhẩy bằng $|f(a+0) - f(a-0)|$.

***Ví dụ:*** hàm $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ có gián đoạn loại một tại $x = 0$. Bước nhẩy tại $x = 0$ là $|f(+0) - f(-0)| = |1 - (-1)| = 2$




***Hình 17***

Hàm $f$ không xác định tại $x = a$ nhưng có giới hạn (hai phía) khi $x \to a$. Nếu ta bổ sung cho hàm $f$ giá trị tại $a$ bằng giới hạn tại $a$ của nó thì ta sẽ thu được một hàm mới liên tục tại $a$. Khi đó điểm $x = a$ được gọi là điểm gián đoạn khử được.

***Ví dụ:*** hàm $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ không xác định tại $x = 0$ nhưng $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nên nếu ta xét hàm $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ thì hàm này liên tục với mọi $x$.

## BÀI TẬP

**6.1.** Tìm miền xác định của hàm số (trên tập số thực) được cho bởi:

$a)\ y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$; $\quad b)\ y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$;

$c)\ y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 6)]$; $\quad d)\ y = \arcsin(x - 2)$; $\quad e)\ y = \arccos\dfrac{1 - 2x}{3}$

**6.2.** Hàm $f$ xác định trên $R$ được gọi là hàm lẻ nếu $f(-x) = -f(x)$; là hàm chẵn nếu $f(-x) = f(x)$. Cho hàm $f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, hãy chứng minh nó là hàm lẻ và tìm hàm ngược của nó.

**6.3.** Chứng minh các công thức sau:

Nếu $x > 0 : \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; suy ra hệ thức tương ứng đối với $x < 0$.

$\arcsin a + \arcsin b = \arcsin(a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2})$.

**6.4.** Người ta định nghĩa các ***hàm Hypebolic*** như sau:

Hàm sinhypebolic, ký hiệu $\operatorname{sh} x$: $f : R \to R,\ f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Hàm coshypebolic, ký hiệu $\operatorname{ch} x$: $g : R \to R,\ g(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Chứng tỏ rằng hàm $\operatorname{sh} x$ là hàm là hàm lẻ và hàm $\operatorname{ch} x$ là hàm chẵn.

Xuất phát từ đồ thị của hàm số $e^x, e^{-x}$ hãy vẽ đồ thì các hàm $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

Tìm hàm ngược của hàm $\operatorname{sh} x$. Phải hạn chế miền xác đinh của hàm $\operatorname{ch} x$ như thế nào để nó có hàm ngược? Hãy tìm hàm ngược đó.

Chứng minh các công thức:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x,\ 2\operatorname{sh} x.\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$

**6.5.** Cho dãy số xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

Chứng minh rằng với mọi n ta có $u_n < 2$.

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tăng, từ đó hãy tìm giới hạn của dãy.

**6.6.** Tính các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$; $\quad$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $\quad$ 3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{2x^3 + 7x^2 + 6x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \sin 2x \operatorname{cotg} x$; $\quad$ 5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$; $\quad$ 6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}$

**6.7.** Tính các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{e^x-e}{x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

9) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+\sqrt{2x^2+1}}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4}-x)}$; 11) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\operatorname{arccotg} x$; 12) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$

**6.8.** Cho hàm số xác định bởi: $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi} \quad x\le 1 \\ 3-ax^2 & \text{khi} \quad x>1 \end{cases}$. Phải chọn $a$ như thế nào để hàm $f$ liên tục với mọi $x$? Khi đó hãy vẽ đồ thị của hàm $f$.

**6.9.** Tìm các điểm gián đoạn và vẽ đồ thị của hàm số cho bởi:

$f(x)=\dfrac{2\mid x-1\mid}{x^2-x^3}$

**6.10.** Dùng tính chất của hàm liên tục để chứng minh rằng:

Phương trình $x^5-3x=1$ có nghiệm trong khoảng (1, 2).

Phương trình $x.2^x=1$ có nghiệm dương nhỏ hơn 1.

**6.11.** Chứng tỏ rằng hàm $f$ xác định bởi $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ với $x\neq 0$, $f(0)=0$ liên tục với mọi $x$.

# *CHƯƠNG 7*

# PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

## §1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Có nhiều vấn đề trong thực tế dẫn đến việc tính giới hạn dạng:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

***Ví dụ:*** một điểm chuyển động trên một đường thẳng theo quy luật xác định bởi hàm $s = f(t)$, trong đó $s$ chỉ vị trí của điểm ở trên đường ứng với thời điểm $t$ (tính theo một gốc vị trí và gốc thời gian nào đó). Như vậy trong khoảng thời gian từ $t_1$ đến $t_2$ điểm chuyển động được một quãng đường $f(t_2) - f(t_1)$. Tốc độ trung bình của điểm trong khoảng thời gian $[t_1, t_2]$ là:

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Nhưng nếu muốn tính tốc độ của điểm tại thời điểm $t_1$ (tốc độ tức thời) thì ta phải xét giới hạn:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Các giới hạn như trên đưa ta đến khái niệm đạo hàm.

### 1.1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

*Giả sử hàm $y = f(x)$ là một hàm số xác định trong một khoảng nào đó chứa điểm $x_0$. Khi đó ta gọi đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0$ là giới hạn (nếu có) của tỷ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi $x \to x_0$.*

Ta ký hiệu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0$ là $f'(x_0)$ hay $y'_{x = x_0}$.

Như vậy nếu hàm $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0$ thì:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

***Ví dụ 1:*** hàm $f(x) = x^2$ có đạo hàm tại $x_0$ và $f'(x_0) = 2x_0^2$.

Thật vậy: $$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

***Ví dụ 2:*** hàm $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$. Thật vậy, xét tỷ số:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

khi $x \to 0^+$ thì giới hạn của tỷ số trên bằng 1, còn bằng -1 khi $x \to 0^-$. Do đó giới hạn trái và giới hạn phải khác nhau, hay tỷ số đó không tồn tại giới hạn tại điểm 0. Như vậy hàm không có đạo hàm tại 0.

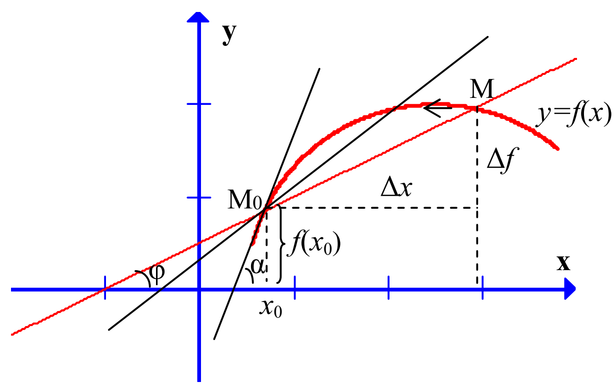
## 1.2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

### *1.2.1. Ý nghĩa hình học*

Người ta định nghĩa tiếp tuyến với một đường cong tại điểm $M_0$ là vị trí giới hạn của cát tuyến $MM_0$ khi M dần tới $M_0$.

Hệ số góc của cát tuyến $MM_0$ là: $tg\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Khi điểm M dần tới điểm $M_0$, nếu đường cong có tiếp tuyến, thì $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$ là hệ số góc của tiếp tuyến $M_0T$.




***Hình 18***

Từ đó ta có: *đạo hàm hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0$ cho ta hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm* $M_0$ (hình 18).

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

### *1.2.2. Ý nghĩa cơ học*

Giả sử một điểm chuyển động trên một đường với quy luật có phương trình $s = f(t)$. Khi đó: *đạo hàm hàm $f(t)$ tại $t_0$ cho ta tốc độ $v$ của chuyển động ở lúc $t_0$ là $v = f'(t_0)$*.

### *1.2.3. Ý nghĩa tổng quát*

Hàm số $y = f(x)$ cho ta mối liên hệ giữa hai đại lượng biến thiên $x$ và $y$. Như vậy đạo hàm $f'(x_0)$ cho ta tốc độ biến thiên của hàm số tại điểm $x_0$.

Nhiều vấn đề trong vật lý, hoá học, sinh học như tốc độ truyền nhiệt, mật độ phân phối vật chất, tốc độ phản ứng, tốc độ phát triển,… đều có liên quan đến khái niệm đạo hàm.

## 1.3. HÀM LIÊN TỤC VÀ HÀM CÓ ĐẠO HÀM

*Hàm $f$ có đạo hàm tại $x_0$ thì nó liên tục tại đó.*

Thật vậy, ta có:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.(x-x_0)$$

do $f$ có đạo hàm tại $x_0$ nên

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ và } \lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$$

vậy $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$ hay $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

nghĩa là hàm $f$ liên tục tại $x_0$.

Nhưng chú ý rằng điều ngược lại chưa chắc đúng. Chẳng hạn hàm $f(x)=|x|$ liên tục tại điểm 0 nhưng lại không có đạo hàm tại điểm đó (xem ví dụ 2 ở mục 1.1).

## 1.4. CÁC PHÉP TOÁN ĐỐI VỚI ĐẠO HÀM

Dựa trên các phép tính đối với giới hạn và định nghĩa của đạo hàm ta có:

### *1.4.1. Đạo hàm của tổng, tích, thương*

Nếu các hàm $u(x), v(x)$ có đạo hàm tại $x_0$ thì:

*Hàm tổng $u(x)+v(x)$ cũng có đạo hàm tại $x_0$ và*

$$(u(x)+v(x))'_{x=x_0} = u'(x_0)+v'(x_0)$$

*Hàm tích $u(x).v(x)$ cũng có đạo hàm tại $x_0$ và*

$$(u(x).v(x))'_{x=x_0} = u'(x_0).v(x_0)+u(x_0).v'(x_0)$$

*Hàm thương $u(x)/v(x)$, với điều kiện $v(x_0)\neq 0$, cũng có đạo hàm tại $x_0$ và*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{u'(x_0).v(x_0)-u(x_0).v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

### *1.4.2. Đạo hàm của hàm số hợp*

*Nếu hàm $u(x)$ có đạo hàm tại $x_0$, hàm $f(u)$ cũng có đạo hàm tại $u=u_0=u(x_0)$ thì hàm hợp $f(u(x))$ cũng có đạo hàm tại $x_0$ và*

$$[f(u(x))]'_{x=x_0} = f'(u_0).u'(x_0)$$

### *1.4.3. Đạo hàm của hàm số ngược*

*Giả sử hàm $y = f(x)$ có hàm ngược là $x = f^{-1}(y)$ xác định trong một lân cận của $y = y_0 = f(x_0)$. Khi đó nếu hàm $y = f(x)$ có đạo hàm khác* 0 *tại $x_0$ thì hàm $x = f^{-1}(y)$ cũng có đạo hàm tại $y_0$ và:*

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

## 1.5. BẢNG ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

Dùng định nghĩa của đạo hàm và các phép tính đối với đạo hàm ta thành lập được bảng sau:

| **Stt** | **Hàm** $f(x)$ | **Đạo hàm** $f'(x)$ | **Stt** | **Hàm** $f(x)$ | **Đạo hàm** $f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $C$ =hằng số | 0 | 8 | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| 2 | $x^\alpha, \alpha \in R$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | 9 | $e^x$ | $e^x$ |
| 3 | $\sin x$ | $\cos x$ | 10 | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 4 | $\cos x$ | $-\sin x$ | 11 | $\arccos x$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 5 | $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | 12 | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| 6 | $\operatorname{cotg} x$ | $\frac{-1}{\sin^2 x}$ | 13 | $\operatorname{arccotg} x$ | $\frac{-1}{1+x^2}$ |
| 7 | $\ln \mid x \mid$ | $\frac{1}{x}$ | 14 | $\log_a \mid x \mid,\ a >$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |

Ta chứng minh một vài công thức:

*Công thức 7:* xét hàm $y = \ln x$ với $x > 0$. Đặt $x = x_0 + \alpha$ ta có:

$$\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{\ln(x_0 + \alpha) - \ln x_0}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x_0}\right)$$

khi $x \to x_0$ thì $\alpha \to 0$. Do $\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x_0}\right) \sim \frac{\alpha}{x_0}$ nên:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x_0}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\alpha}.\frac{\alpha}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Vậy: $(\ln x)'_{x = x_0} = \dfrac{1}{x_0}$

Do $x_0$ là số dương tuỳ ý nên với $x > 0$ thì: $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (1)$

Bây giờ xét hàm $y = \ln(-x)$ với $x < 0$. Đặt $u = -x$ thì $u > 0$ và theo (1) ta có:

$$y = \ln u \Rightarrow y'_u = \frac{1}{u}; \quad u = -x \Rightarrow u'_x = -1$$

Theo quy tắc hàm hợp thì:

$$[\ln(-x)]'_x = y'_x = y'_u . u'_x = \frac{1}{u}.(-1) = \frac{1}{x} \qquad (2)$$

Có thể viết chung (1) và (2) dưới dạng công thức (7).

*Công thức 8:* hàm $y = a^x$ có hàm ngược là $x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$.

Theo quy tắc đạo hàm của hàm ngược ta có:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$$

*Công thức 2:* ta viết $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Xét hàm hợp:

$y = e^u$ với $u = \alpha \ln x$ thì $y'_x = y'_u . u'_x = e^u . \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

***Các ví dụ tính đạo hàm:***

1) $y = \sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}, \quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}} . \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{2}} . \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{x}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}}$

2) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right); \quad y' = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

3) $y = e^{-x^2}; \quad y' = (-2x)e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$

4) $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}; \quad y' = 2.\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} . \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}} . \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{1 + x^2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

5) $y = x^x,\ x > 0$, ta không thể áp dụng ngay công thức (2) hoặc (8). Ta viết:

$y = x^x = e^{x \ln x} \Rightarrow y' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

Ta cũng có thể dùng phương pháp đạo hàm loga:

Lấy logarit cả hai vế của $y = x^x$: $\ln y = x \ln x$

Lấy đạo hàm theo $x$ hai vế của biểu thức vừa nhận được:

$$(\ln y)' = (x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

Từ đó: $y' = y.(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

## 1.6. ĐẠO HÀM CẤP CAO

### *1.6.1. Hàm đạo hàm*

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0$ là một giá trị bằng số. Nếu hàm $f$ có đạo hàm tại mọi điểm $x$ thuộc khoảng mở $E$ nào đó thì với mỗi $x \in E$ có tương ứng một $y'$ là đạo hàm của hàm $f$ tại $x$. Như vậy ta có một hàm mới, gọi là hàm đạo hàm, nó cũng được ký hiệu là $y' = f'(x)$.

### *1.6.2. Đạo hàm cấp cao*

*Nếu hàm $f'(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0$ (tức là $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại) thì đạo hàm của $f'$ được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm $f$ tại điểm $x_0$.* Nó được ký hiệu là $f''(x_0)$ hay $y''_{x=x_0}$.

Bằng quy nạp ta định nghĩa được đạo hàm cấp n của hàm $y = f(x)$.

*Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$ tại mọi điểm $x$ thuộc miền xác định của hàm thì đạo hàm (nếu có) của hàm đạo hàm cấp $n-1$ tại điểm $x = x_0$ được gọi là đạo hàm cấp $n$ của hàm $f$ tại điểm $x_0$.*

Ký hiệu đạo hàm cấp $n$ của hàm $f$ tại điểm $x = x_0$ là $f^{(n)}(x_0)$. Khi đó:

$$f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'_{x=x_0}$$

Trong cơ học, nếu chuyển động của một đường thẳng có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp một $f'(t_0)$ cho ta tốc độ chuyển động tại thời điểm $t = t_0$, đạo hàm cấp hai $f''(t_0)$ cho ta gia tốc của chuyển động tại $t = t_0$.

***Các ví dụ:***

Hàm $y = x^n$, với $n$ là một số nguyên dương, có đạo hàm tới mọi cấp trên tập hợp số thực $R$.

Với $k < n$: $\quad y^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}$

Với $k = n$: $\quad y^{(k)} = n!$

Với $k > n$: $\quad y' = 0$

Hàm $y = \sin x$ có đạo hàm tới mọi cấp trên $R$ và $y^{(n)} = \sin(x + n\pi / 2)$.

Thật vậy:

Với $n = 1$ thì ta có công thức đúng: $y' = \cos x = \sin(x + \pi / 2)$

Giả sử công thức đó đúng với $n - 1$, tức là $y^{(n-1)} = \sin[x + (n-1)\pi / 2]$, ta sẽ chứng minh nó đúng cho $n$.

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' = \cos[x + (n-1)\pi / 2] = \sin(x + n\pi / 2)$$

Tương tự ta cũng chứng minh được:

Nếu $y = \cos x$ thì $y^{(n)} = \cos(x + n\pi / 2)$

## §2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

### 2.1. VI PHÂN LÀ PHẦN CHÍNH CỦA SỐ GIA HÀM SỐ

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$. Khi đó ta có:

$$\lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

Điều đó chứng tỏ lượng $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$ là một vô cùng bé khi $x \to x_0$.

Ta đặt: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \alpha$ với $\alpha$ là một vô cùng bé khi $x \to x_0$.

Từ đó: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$ (2.1)

Đặt $\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x) - f(x_0)$ thì (2.1) trở thành:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x \qquad (2.2)$$

Khi $x \to x_0$ thì $\Delta x$ là một vô cùng bé. Nếu $f'(x_0) \neq 0$ thì lượng $f'(x_0)\Delta x$ là một vô cùng bé cùng bậc với $\Delta x$, còn lượng $\alpha\Delta x$ một vô cùng bé cấp cao hơn $\Delta x$. Khi đó ta nói lượng $f'(x_0)\Delta x$ là phần chính của vô cùng bé $\Delta f$ khi $x \to x_0$.

Quan sát biểu thức (2.2) ta thấy số gia $\Delta f$ của hàm số $f$ được phân tích thành hai thành phần: thành phần thứ nhất là phần chính của $\Delta f$, thành phần thứ hai là một vô cùng bé có cấp cao hơn $\Delta f$. Ta đi tới khái niệm vi phân của hàm số.

**Định nghĩa.** ***Vi phân*** *của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ là phần chính của số gia $\Delta f(x_0)$; nó khác số gia $\Delta f(x_0)$ bởi một lượng vô cùng bé có cấp cao hơn $\Delta x$.*

Vi phân của hàm số được kí hiệu là $df(x_0)$ hay nếu không chú ý tới giá trị cụ thể của $x_0$ thì ta viết $df$ hay $dy$.

Vậy nếu hàm $f$ có đạo hàm tại $x_0$ thì theo cách phân tích trên ta có $df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\Delta x$ hay

$$dy = f'\left(x\right)\Delta x \qquad (2.3)$$

*Nếu hàm $f$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì nó cũng có vi phân tại $x_0$ và vi phân của nó được cho bởi công thức (2.3).*

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng ngược lại, *nếu hàm $f$ có vi phân tại $x = x_0$ thì nó cũng có đạo hàm tại $x_0$.*

Thật vậy, hàm $f$ có vi phân nên ta có thể phân tích số gia $\Delta f$ của nó thành:

$$\Delta f\left(x_0\right) = A\Delta x + \alpha\Delta x$$

trong đó $A \neq 0, \alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$.

Chia cả hai vế cho $\Delta x$ ta được $\dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} = A + \alpha$; từ đó $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$.

Giới hạn trên của tỷ số trên tồn tại, vậy hàm $f$ có đạo hàm tại $x_0$ và đạo hàm đó bằng A.

$$f'\left(x_0\right) = A$$

Do kết quả trên, sau này ta cũng gọi *một hàm có đạo hàm là hàm khả vi.*

*Chú ý:* Với hàm $y = x$ ta có $dy = dx = 1.\Delta x$. Tức là nếu $x$ là biến số độc lập thì số gia của nó bằng vi phân của nó $dx = \Delta x$, vì vậy biểu thức của vi phân hàm số $f$ còn được viết dưới dạng:

$$df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)dx \text{ hay } dy = f'\left(x_0\right)dx$$

Từ đó ta có $f'\left(x_0\right) = \dfrac{df(x_0)}{dx}$ hay gọn hơn $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

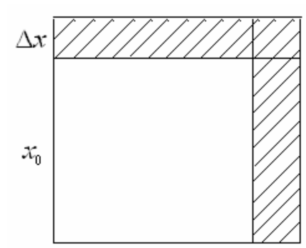
*Đạo hàm hàm số là tỷ số của vi phân hàm số và vi phân của biến số độc lập.*

***Thí dụ***: Tìm số gia và tìm vi phân của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm $x_0$

$\Delta f\left(x_0\right) = \left(x_0 + \Delta x\right)^2 - {x_0}^2 = 2x_0\Delta x - \Delta x^2$

$df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\Delta x = 2x_0\Delta x$

Ta thấy rằng vi phân là phần chính của số gia, nó khác số gia bởi một vô cùng bé có bậc hai so với $\Delta x$.




Quan sát trên hình ta thấy giá trị hàm $f\left(x\right) = x^2$ tại $x_0$ là diện tích hình vuông có cạnh $x_0$; số gia $\Delta f\left(x_0\right)$ là phần diện tích tăng thêm khi cạnh hình vuông được tăng thêm

$\Delta x$ còn vi phân $df(x_0)$ là phần diện tích nói trên nhưng bỏ đi hình vuông con có diện tích $\Delta x^2$.

Nếu $|\Delta x|$ khá bé ta có thể coi vi phân là giá trị xấp xỉ của số gia, từ đó ta có công thức tính giá trị gần đúng của số gia hàm số:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0)\Delta x$$

Ta suy ra công thức tính giá trị xấp xỉ của hàm $f$ tại $x_0 + \Delta x$:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (2.4)$$

***Thí dụ:*** Tính gần đúng $\sqrt[4]{17}$

Ta xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Áp dụng (2.4) ta có:

$$\sqrt[4]{x_0 + \Delta x} \cong \sqrt[4]{x_0} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x_0^{\,3}}}\Delta x$$

Cho $x_0 = 16, \Delta x = 1$ ta có:

$$\sqrt[4]{17} \cong \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} \cdot 1 = 2 + \frac{1}{4 \cdot 2^3} = 2{,}031$$

Áp dụng công thức (2.4) cho các hàm số $\sqrt[n]{x}, \sin x, \ln x$ ta có:

a) $\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \cong \sqrt[n]{x_0} + \dfrac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_0^{\,n-1}}}$.

Cho $x_0 = 1, \Delta x = \alpha$ thì ta có: $\sqrt[n]{1+\alpha} \cong 1 + \dfrac{\alpha}{n}$ với $|\alpha|$ khá bé.

b) $\sin(x_0 + \Delta x) \cong \sin x_0 + \cos x_0 \Delta x$;

Cho $x_0 = 0, \Delta x = \alpha$ ta có: $\sin\alpha \cong \alpha$ với $|\alpha|$ khá bé.

c) $\ln(x_0 + \Delta x) \cong \ln x_0 + \dfrac{\Delta x}{x_0}$

Cho $x_0 = 1, \Delta x = \alpha$ ta có: $\ln(1+\alpha) \cong \alpha$ với $|\alpha|$ khá bé.

## 2.2. CÁC QUY TẮC TÍNH VI PHÂN

Theo định nghĩa, vi phân của hàm số tại $x_0$ là $dy = y'dx$, kết hợp với các quy tắc tính đạo hàm ta có:

*1). Nếu các hàm số $u(x), v(x)$ khả vi tại $x_0$ thì các hàm tổng, tích, thương (với điều kiện $v(x_0) \neq 0$) cũng khả vi và:*

$$d(u+v)=du+dv$$
$$d(uv)=vdu+udv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}, v\left(x_0\right)\neq 0$$

*2). Nếu hàm $u=u(x)$ khả vi tại $x_0$, hàm $y=f(u)$ khả vi tại $u_0=u(x_0)$ thì hàm hợp $y=f\left[u\left(x\right)\right]$ khả vi và $df\left[u\left(x\right)\right]=\left[f'\left(u_0\right)\cdot u'\left(x_0\right)\right]dx=f'\left(u_0\right)du\left(x_0\right)$.*

Về mặt hình thức ta vẫn có vi phân của hàm số bằng đạo hàm của hàm nhân với vi phân của biến số không phân biệt biến số đó là độc lập hay phụ thuộc.

### 2.3. VI PHÂN CẤP CAO

Giả sử hàm số $y=f(x)$ khả vi trong một khoảng nào đó. Khi ấy, vi phân $dy=f'\left(x\right)dx$ phụ thuộc vào $x$, còn $dx$ là hằng số nếu $x$ là biến số độc lập; nếu hàm số $f'\left(x\right)dx$ khả vi tại $x_0$ thì vi phân $d\left[f'\left(x\right)dx\right]$của nó được gọi là vi phân cấp hai của hàm số xuất phát $f$, ta ký hiệu vi phân cấp hai là $d^2f$ hay $d^2y$. Như vậy:

$$d2y=d(dy)=d\left[f'\left(x\right)dx\right]=\left[f'\left(x_0\right)dx\right]dx=f''\left(x_0\right)dx^2$$

Vi phân cấp hai của hàm $f(x)$ tại điểm $x_0$ bằng đạo hàm cấp hai của $f$ tại điểm $x_0$ nhân với bình phương của vi phân biến số độc lập: $d^2y=f''\left(x_0\right)dx^2$

Ta cũng có thể viết đạo hàm cấp hai của $f$ dưới dạng: $f''\left(x_0\right)=\dfrac{d^2y\left(x_0\right)}{dx^2}$

Bằng quy nạp ta chứng tỏ được rằng: nếu hàm $f$ với biến số $x$ độc lập có đạo hàm tới cấp n tại $x_0$thì nó cũng có vi phân cấp n tại $x_0$, ký hiệu $d^ny\left(x_0\right)$ và $d^ny\left(x_0\right)=f^{(n)}y\left(x_0\right)dx^n$.

Từ đó:

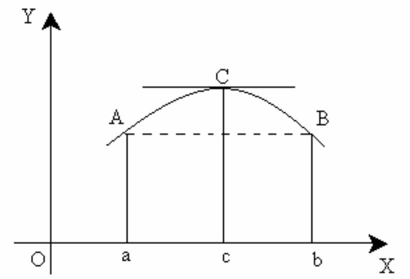
$$f^{(n)}y\left(x_0\right)=\frac{d^ny\left(x_0\right)}{dx^n}$$

## §3. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI

### 3.1. ĐỊNH LÝ ROLLE

*Nếu hàm $f$ liên tục trên khoảng kín* [a,b]*; khả vi trong khoảng (a,b); $f(a)=f(b)$ thì trong khoảng mở $(a,b)$ có ít nhất một điểm $c$ sao cho $f'(c)=0$*

***Chứng minh:***




Hàm $f$ liên tục trên [a,b] nên theo tính chất hàm liên tục trên khoảng kín hàm $f$ đạt giá trị lớn nhất $M$ và giá trị nhỏ nhất $m$ trên $[a,b]$

Nếu nó đạt cả hai giá trị đó tại hai đầu mút $a$, $b$ thì do $f(a)=f(b)$ ta suy ra $M=m$, khi đó hàm là không đổi trên $[a,b]$ nên đạo hàm $f'(x)=0$ với $x\in[a,b]$.

Xét trường hợp nó đạt ít nhất một trong hai giá trị $M$, $m$ tại một điểm nằm trong $(a,b)$, chẳng hạn nó đạt giá trị lớn nhất $M$ tại $c\in(a,b)$.

Khi đó: $M=f(c)\geq f(x)$ với mọi $x\in(a,b)$.

Với $x<c$ thì: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to c-0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$

Với $x>c$ thì: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to c+0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ (3.1)

Do hàm $f$ khả vi tại $c$ nên $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ tồn tại: giới hạn bên phải và bên trái tại $c$ phải bằng nhau.

Vì vậy, từ kết quả (3.1) ta suy ra: $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=0$

Ý nghĩa hình học của định lý trên là: *Trên cung AB biểu diễn hàm $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý, có một điểm $C$ tại đó tiếp tuyến song song với trục $Ox$.*

Từ định lý Rolle ta có định lý quan trọng sau.

## 3.2. ĐỊNH LÝ LAGRANGE

*Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng kín $[a,b]$, khả vi trên khoảng mở $(a,b)$ thì trong khoảng $(a,b)$ có ít nhất một điểm $c$ sao cho:*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (3.2)$$

***Chứng minh:***

Ta xét hàm phụ: $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a)$

Do hàm $f(x)$ liên tục và khả vi nên hàm F cũng liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong $(a,b)$. Hơn nữa $F(a)=f(a)$; $F(b)=f(a)$ hàm F thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle nên tồn tại $c\in(a,b)$ để $F'(c)=0$

Ta có: $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$

Từ đó: $\dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)} = f'(c)$. Ta suy ra công thức phải chứng minh (3.2).

Về mặt hình học, định lý Lagrange nói lên rằng: *Trên cung AB có ít nhất một điểm C tại đó tiếp tuyến song song với dây cung AB.*

*Chú ý:* Nếu ta thêm điều kiện $f(a) = f(b)$ thì từ (3.2) ta có $f'(c) = 0$ tức là ta lại có định lý Rolle.

Công thức (3.2) còn được gọi là *công thức số gia hữu hạn*.

Đặt $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$, số $c$ nằm trong khoảng $(x_0, x_0 + \Delta x)$ nên có thể viết:

$c = x_0 + \theta\Delta x$ với $0 < \theta < 1$, công thức (3.2) có dạng:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'\left(x_0 + \theta\Delta x\right)\Delta x \qquad (3.3)$$

Bây giờ ta đi xét một ứng dụng của định lý Lagrange trong việc khảo sát tính đơn điệu của một hàm số.

**Định nghĩa:**

Hàm $y = f(x)$ là *đơn điệu tăng* trên một tập hợp $E$ nếu với $x_1, x_2$ bất kì thuộc $E$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hàm $y = f(x)$ là *đơn điệu giảm* trên một tập hợp $E$ nếu với $x_1, x_2$ bất kì thuộc $E$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

***Định lý:****Giả sử $f$ là một hàm liên tục và khả vi trong một khoảng E nào đó.*

*1). Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in E$ thì hàm $f$ không đổi trên E.*

*2). Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in E$ thì hàm $f$ tăng trên E.*

*3). Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in E$ thì hàm $f$ giảm trên E.*

*Chứng minh:*

Lấy hai điểm $x_1, x_2$ bất kỳ thuộc E rồi áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f$ trên $[x_1, x_2]$ ta tìm được điểm $c \in (x_1, x_2)$ sao cho:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\left(x_2 - x_1\right) \qquad (3.4)$$

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in E$ thì $f'(c) = 0$ ta suy ra $f(x_1) = f(x_2)$; Giá trị của hàm số $f$ tại hai điểm bất kỳ của E đều bằng nhau nên hàm $f$ có giá trị không đổi trên E.

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in E$ thì $f'(c) > 0$

Từ (3.4) suy ra với mọi $x_1, x_2$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$: Hàm $f$ tăng.

$f'(x) < 0, \forall x \in E$ thì $f'(c) < 0$, từ đó $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$: Hàm $f$ giảm.

***Thí dụ 1:***

Chứng minh rằng $\forall x \in [-1, 1]$ ta có: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Xét hàm số $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Nó liên tục trên $[-1,1]$, khả vi trong $(-1,1)$ và $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ tại mọi $\forall x \in (-1,1)$ nên nó không đổi trong $(-1,1)$. Để tính giá trị không đổi của nó ta có thể tính giá trị của hàm số tại một điểm bất kỳ thuộc khoảng $(-1,1)$, chẳng hạn tại $x = 0$. Ta có $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

Vậy trong khoảng $(-1,1)$ ta có: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Ta cũng có

$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Vậy với $\forall x \in [-1,1]$ ta có: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

***Thí dụ 2:*** Tìm các khoảng đơn diệu của hàm số $f(x) = e^{-x^2}$

Hàm số xác định với mọi $x$. Ta có $y' = -2xe^{-x^2}$. Do $e^{-x^2} > 0$ với mọi x nên dấu của $y'$ngược với dấu của $x$.

Với $x < 0$ thì $y' > 0$ hàm $f$ tăng. Với $x > 0$ thì $y' < 0$ hàm $f$ giảm.

Từ định lý Rolle ta cũng suy ra:

***Định lý Cauchy:*** Nếu các hàm $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong $(a,b), g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ thì có ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Để chứng minh chỉ việc áp dụng định lý Rolle cho hàm phụ:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x) - g(a)\right]$$

Định lý Lagrange là một trường hợp đặc biệt của định lý Cauchy với $g(x) = x$.

**Quy tắc Lopital:**

*Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ liên tục và khả vi trong một miền nào đó, khi $x \to x_0$ hoặc khi $x \to \infty$ thì cả hai hàm $f(x), g(x)$ cùng tiến tới không (hoặc cùng tiến tới vô cùng). Khi đó nếu giới hạn của tỷ số $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì giới hạn của tỷ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng tồn tại và $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Ta chứng minh quy tắc trên theo trường hợp đơn giản khi $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Khi đó theo định lý Cauchy ta có:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Do $c \in (x_0, x)$ nên khi $x \to x_0$ thì $c \to x_0$. Từ đó $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c \to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Giới hạn vế phải tồn tại nên giới hạn vế trái cũng tồn tại. Ta công nhận các trường hợp còn lại của quy tắc.

Quy tắc Lopital có ứng dụng quan trọng trong việc tính toán các giới hạn có dạng vô định $\dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}$.

*Các thí dụ:*

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^{2x} - e^x}{\cos x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^{2x} - 2}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4e^{2x}}{4} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x (\ln a)^n}{n!} = \infty \quad (a > 1)$

Các thí dụ 3 và 4 nói lên rằng khi $x \to \infty$ thì các hàm số $a^x, x^\alpha, \ln x$ là các vô cùng lớn nhưng hàm logarit tăng chậm hơn hàm luỹ thừa, hàm mũ tăng nhanh hơn hàm luỹ thừa.

Chú ý: Khi gặp các dạng vô định $0.\infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty, 0^\infty, 0^0, \infty^0$ người ta tìm cách biến đổi để đưa chúng về dạng $\dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}$ rồi áp dụng quy tắc Lopital.

***Thí dụ:***

5. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \ln x) = \lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{\ln x}{1/x^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1/x}{-2/x^2} = -\dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

6. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. Nó có dạng $1^\infty$. Ta tìm giới hạn của logarit của nó.

Đặt $A_1 = \lim\limits_{x \to 0} \ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-tgx}{2x} = -\dfrac{1}{2}$

Do $A_1 = \ln A$ ta suy ra $A = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

### 3.3. CÔNG THỨC TAYLOR

Trong §2.1 ta định nghĩa vi phân hàm số là phần chính của số gia hàm số:

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x$ với $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$

Đặt $\Delta x = h, x_0 + \Delta x = x$ thì ta có $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) h + \alpha h$

Nếu bỏ qua lượng $\alpha h$ thì $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)h$ tức là ta đã xấp xỉ hàm số $f(x)$ bởi đa thức bậc nhất của $h$.
Trong phần này ta trình bày cách xấp xỉ hàm số $f(x)$ bởi đa thức bậc n của $h$:
$f(x) \cong P_n(h) = a_0 + a_1 h + +a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n$
Muốn vậy ta giả thiết hàm $f(x)$ có đạo hàm tới cấp $n$ và ta viết:
$f(x) = P_n(h) + \alpha h^n$ với $\alpha \to 0$ khi $h \to 0$
Vấn đề đặt ra cần chọn các hệ số của đa thức như thế nào để điều kiện trên được thoả mãn tức là tìm đa thức $P_n(h)$ để:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(x_0 + h\right) - P_n(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \alpha = 0$$

Để ý rằng:

$$\lim_{h\to 0} \left[ f\left(x_0 + h\right) - P_n(h) \right] = f(x_0) - a_0$$

$$\lim_{h\to 0} \left[ f'\left(x_0 + h\right) - P_n'(h) \right] = f'(x_0) - a_1$$

$$\lim_{h\to 0} \left[ f''\left(x_0 + h\right) - P_n''(h) \right] = f''(x_0) - 1.2a_2$$

Một cách tổng quát:

$$\lim_{h\to 0} \left[ f^{(k)}\left(x_0 + h\right) - P_n^{(k)}(h) \right] = f^{(k)}(x_0) - k!\,a_k$$

Như vậy nếu ta chọn các hệ số của đa thức $P_n(h)$ sao cho: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0,1,..,n$ thì các giới hạn ở vế trái bằng không và khi đó ta có thể tính giới hạn của tỷ số:

$$\frac{f\left(x_0 + h\right) - P_n(h)}{h^n}$$

bằng cách áp dụng quy tắc Lopital liên tục n lần.

Như vậy, nếu ta chọn các hệ số của đa thức $P_n(h)$ sao cho: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0,1,..,n$ thì đa thức $P_n(h)$ sẽ là phần chính bậc n của hàm số $f(x)$ và nó chỉ khác $f(x)$ bởi một vô cùng bé cấp cao hơn $h^n$.
Ta đã chứng minh được công thức Taylor:
*Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp n trong một miền chứa điểm $x_0$ thì:*

$$f(x) = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n + \alpha\left(x - x_0\right)^n \quad (3.7)$$

*với $\alpha \to 0$ khi $x \to x_0$.*
Thành phần $\alpha\left(x - x_0\right)^n$ được gọi là *phần dư thứ n* của công thức Taylor và ta kí hiệu là $R_n$.
Công thức Taylor cho phép ta khai triển một hàm bất kỳ thành đa thức của $(x - x_0)$. Đặc biệt khi $x_0 = 0$ thì ta có công thức Maclaurin:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \alpha x^n} \qquad (3.8)$$

Nó cho phép khai triển một hàm bất kì (có đạo hàm liên tục tới cấp n) thành đa thức của $x$.

***Các thí dụ:***

*Khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = e^x$

Hàm số này có đạo hàm liên tục tới mọi cấp và $f^{(k)}(x) = e^x$ nên $f^{(k)}(0) = 1$ với $k = 0,1,...,n$. Do đó:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n \qquad (3.9)$$

*Khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \sin x$

Hàm số này có đạo hàm liên tục tới mọi cấp và $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$.

Từ đó:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k-1} \qquad (3.10)$$

*Khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \cos x$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}$$

*Chú ý:* Nếu hàm số $f$ có đạo hàm tới cấp $n+1$ thì người ta chứng minh được rằng có thể viết phần dư $R_n$ của công thức Taylor dưới dạng:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (3.11)$$

Công thức số gia hữu hạn Lagrange chính là một trường hợp đặc biệt của công thức Taylor cấp $n = 0$ với phần dư viết theo dạng trên.

Nhờ cách viết công thức Taylor với phần dư dạng (3.11) mà người ta có thể dùng nó để tính gần đúng giá trị của hàm số và đánh giá sai số mắc phải.

Phần dư của khai triển hàm số $f(x) = e^x$ dưới dạng (3.11) là:

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Nếu muốn tính số $e$ chính xác tới $10^{-3}$ thì cần phải xác định $n$ sao cho:

$$R_n < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

Ta có: $\frac{3}{6!} = 0,004 > 10^{-3}$; $\frac{3}{7!} = 0,0006 < 10^{-3}$.

Vậy để tính số $e$ chính xác đến $10^{-3}$ thì ta sử dụng công thức (3.9) với $x = 1$ và khai triển đến cấp $n = 6$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{6!} = 2,7181$$

Vậy ta có: $e = 2,718$

Phần dư của khai triển $\sin x$ là: $R_{2k-1} = (-1)^k \cos\theta x \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $0 < \theta < 1$

Ta luôn có: $|\cos\theta x| \le 1$ nên: $|R_{2k-1}| < \dfrac{|x^{2k+1}|}{(2k+1)!}$

Chẳng hạn, để tính $\sin 36^0$ chính xác đến $10^{-3}$ ta cho trong (3.10) $x = \dfrac{\pi}{5}$ ta có:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^3}{3!} = 0,0413 > 10^{-3}; \quad \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^5}{5!} = 0,0008 < 10^{-3}.$$

Vậy ta có: $\sin\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^3}{3!} = 0,587$.

Phần dư của khai triển của $\cos x$ là: $R_{2k} = (-1)^{k+1} \cos x\theta x \dfrac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$.

## 3.4. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

***Định nghĩa:*** *Giả sử hàm số $f$ xác định trong một khoảng mở $E$ đủ nhỏ chứa điểm $x_0$.*

*Hàm số $f$ có cực đại tại $x_0$ nếu với mọi $x \in E$ ta có $f(x) \le f(x_0)$*

*Hàm số $f$ có cực tiểu tại $x_0$ nếu với mọi $x \in E$ ta có $f(x) \ge f(x_0)$*

Điểm $x_0$ tại đó hàm số có cực đại hoặc cực tiểu được gọi là ***điểm cực trị*** của hàm số.

Trong chứng minh định lý Rolle ta đã thấy: Nếu hàm số $f(x)$ khả vi có cực trị tại $x_0$ thì tại đó đạo hàm của hàm số bị triệt tiêu: $f'(x) = 0$.

Đó là điều kiện cần của cực trị. Nhưng *điều kiện đó **không đủ.***

Chẳng hạn hàm số $f(x) = x^3$ có đạo hàm triệt tiêu $f'(x) = 3x^2 = 0$ tại $x = 0$

Với $\left.\begin{matrix} x < 0 & f(x) < f(0) = 0 \\ x > 0 & f(x) > f(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị tại 0.

**Điều kiện đủ của cực trị**

**1) Định lý 1:** *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng $(a,b)$ chứa điểm $x_0$, khả vi trong khoảng đó (có thể trừ tại $x_0$). Nếu đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi $x$ qua $x_0$ thì hàm có cực trị tại $x_0$.*

*Cực trị đó là cực đại nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + qua –.*

*Cực trị đó là cực tiểu nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - qua +.*

Thật vậy, nếu $f'(x) > 0$ trong $(a, x_0)$ thì hàm số $f$ tăng trong khoảng đó nên $f(x) < f(x_0)$.

Nếu $f'(x) < 0$ trong $(x_0, b)$ thì hàm số $f$ giảm trong khoảng đó nên $f(x) < f(x_0)$.

Với mọi $x$ thuộc lân cận của $x_0$ ta có $f(x) \le f\left(x_0\right)$. Vậy tại $x_0$ hàm số có cực đại.
Chứng minh tương tự cho trường hợp cực tiểu.
Chú ý: Không nhất thiết hàm số phải khả vi tại điểm cực trị $x_0$.
Chẳng hạn, hàm số $f(x) = |x|$ có cực tiểu tại $x = 0$ nhưng tại đó hàm số không khả vi.
Kết hợp với các kết quả trên ta có ***quy tắc tìm cực trị của hàm số:***
*a. Tìm các điểm thuộc miền xác định của hàm số mà tại đó đạo hàm của hàm số triệt tiêu hoặc không tồn tại;*
*b. Xét dấu của đạo hàm tại lân cận các điểm đó, nếu đạo hàm có dấu khác nhau ở hai bên điểm đó thì điểm đang xét là điểm cực trị.*
***Thí dụ:*** Hàm số $f(x) = e^{-x^2}$ có cực đại tại $x = 0$. Thật vậy, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, với $x < 0$ thì $f'(x) > 0$; với $x > 0$ thì $f'(x) < 0$ đạo hàm có dấu khác nhau ở hai bên điểm $x = 0$.

**2) Định lý 2*:*** *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai ở lân cận điểm $x_0$ (kể cả tại cả $x_0$). Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \ne 0$ thì hàm số có cực trị tại $x_0$. Cụ thể là:*

*Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số có cực tiểu tại $x_0$.*

*Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số có cực đại tại $x_0$.*

Thật vậy, từ khai triển hàm số $f$ theo công thức Taylor đến cấp hai:

$$f(x) = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \alpha\left(x - x_0\right)^2;$$

Do $f'\left(x_0\right) = 0$ nên:

$$f(x) - f\left(x_0\right) = \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \alpha\left(x - x_0\right)^2;$$

$$\alpha \to 0 \ khi \ x \to x_0$$

Ở lân cận của $x_0$, dấu của $f(x) - f\left(x_0\right)$ là dấu của $f''\left(x_0\right)$.
Do đó nếu $f''(x_0) > 0$ thì $f(x) \ge f(x_0)$ hàm số có cực tiểu tại $x_0$. Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $f(x) \le f(x_0)$ hàm số có cực đại tại $x_0$.
***Thí dụ:*** Xét hàm số $f(x) = e^{-x^2}$, ta có: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f'(x) = 0$ khi $x = 0$
$f''(x) = -2\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2}$; $f''(0) = -2$. Hàm số có cực đại tại $x = 0$.

## 3.5. HÀM SỐ LỒI, LÕM, ĐIỂM UỐN

**Định nghĩa:** *Đồ thị hàm số $f(x)$ được gọi là lồi (chính xác hơn là **lồi trên**) trên đoạn $[a,b]$ nếu nó nằm phía dưới mọi tiếp tuyến với đồ thị vẽ trong đoạn đó.*
*Đồ thị hàm số $f(x)$ được gọi là lõm (chính xác hơn là **lồi dưới**) trên đoạn $[a,b]$ nếu nó nằm phía trên mọi tiếp tuyến với đồ thị vẽ trong đoạn đó.*
Điểm trên đường cong ngăn cách phần lồi và phần lõm được gọi là ***điểm uốn.***

**Định lý.** *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai trong một miền chứa điểm $x_0$.*

*Nếu trong miền đó $f''(x) > 0$ thì đồ thị hàm số là lõm;*

*Nếu trong miền đó $f''(x) < 0$ thì đồ thị hàm số là lồi.*

***Chứng minh:*** Ta khai triển hàm số $f$ tại lân cận $x_0$ theo công thức Taylor đến cấp hai:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0)^2$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại $M_0(x_0, y_0)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

gọi $M$ là điểm có hoành độ $x$ trên đường cong, $P$ là điểm có hoành độ $x$ trên tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$, ta có:

$$\overline{PM} = f(x) - y = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0)^2$$

Do $\alpha \to 0$ *khi* $x \to x_0$ nên ở lân cận của $x_0$ dấu của $\overline{PM}$ là dấu của $f''(x_0)$. Từ đó:

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $\overline{PM} > 0$: điểm $M$ nằm phía trên điểm $P$, tức là đường cong nằm phía trên tiếp tuyến: hàm số lõm trong lân cận $x_0$;

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $\overline{PM} < 0$: điểm $M$ nằm phía dưới điểm $P$, tức là hàm số lồi trong lân cận $x_0$.

Từ kết quả trên ta suy ra rằng: *Nếu tại $x_0$ ta có $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi $x$ qua $x_0$ thì hàm số $f(x)$ có điểm uốn tại $x_0$.*

***Thí dụ:*** Xét hàm số $f(x) = e^{-x^2}$, ta có: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f''(x) = -2(1 - 2x^2)e^{-x^2}$;

$f''(x) = 0$ khi $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Với $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ hàm lõm trong các khoảng đó.

Với $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0$ hàm lồi trong khoảng đó.

Tại $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ hàm có điểm uốn.

## 3.6. KHẢO SÁT HÀM SỐ

Để khảo sát sự biến thiên và dạng của một hàm số cho bằng biểu thức giải tích $y = f(x)$ ta thường tiến hành theo các bước sau:

1. *Tìm miền xác định của hàm.* Nếu hàm là tuần hoàn thì chỉ cần khảo sát nó trong một khoảng có độ dài bằng chu kỳ. Nếu hàm chẵn hay lẻ thì chỉ cần khảo sát nó trên miền ứng với $x \geq 0$.

2. *Tìm các khoảng đơn điệu và các cực trị.*

3. *Tìm các khoảng lồi, lõm, điểm uốn nếu cần thiết.*

4. Nếu hàm có *nhánh vô tận*, cần xác định dạng của hàm đối với nhánh vô tận.

Đường cong biểu diễn hàm $y = f(x)$ có nhánh vô tận khi ít nhất một trong 2 tọa độ x hoặc y của một điểm M thuộc đường cong dẫn tới $\infty$.

*Đường thẳng (D) là tiệm cận của đường cong (C) nếu khoảng cách MH từ một điểm M trên đường cong đến đường thẳng dần tới 0 khi M ra xa vô tận.*

a) Nếu khi $x \to a$ mà $f(x) \to \infty$ thì *đường thẳng* $x = a$ *là đường* ***tiệm cận đứng*** của đường cong $y = f(x)$. Trong nhiều trường hợp cần phải phân biệt tiệm cận đứng phía phải (ứng với $x \to a+0$; hoặc tiệm cận đứng phía trái (ứng với $x \to a-0$) ).

b) Nếu khi $x \to \infty$ mà $f(x) \to b$ thì *đường thẳng* $y = b$ *là đường* ***tiệm cận ngang*** của đường cong $y = f(x)$

c) Nếu $f(x) \to \infty$ khi $x \to \infty$ và tồn tại các giới hạn: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$ thì *đường thẳng* $y = kx + b$ *là* ***tiệm cận xiên*** *của đường cong* $y = f(x)$.

Trong trường hợp này ta có: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx+b)\right] = 0.$

Trong nhiều trường hợp cần phân biệt *tiệm cận xiên phía phải* (với $x \to +\infty$) và *tiệm cận xiên phía trái* (với $x \to -\infty$) .

**Các thí dụ về khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số**

***Thí dụ 1***: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $f(x) = e^{-x^2}$

Hàm xác định với mọi x. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f' = 0 \quad khi \quad x = 0; f(0) = 1.$

Lập bảng xét dấu của đạo hàm để biết chiều biến thiên của hàm số:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *X* | -∞ | | *0* | | +∞ |
| *F'* | | + | *0* | - | |
| *F* | *0* | ↗ | *1* | ↘ | *0* |

Với $x < 0$ hàm số tăng, với $x > 0$ hàm số giảm, tại $x = 0$ hàm số có cực đại, giá trị cực đại bằng 1.

Ta xét đạo hàm cấp hai và lập bảng xét dấu đạo hàm cấp hai để tìm các khoảng lồi, lõm của đường cong:

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}; f'' = 0 \; khi \; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+\infty$ |
| $f''$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f$ | Lõm | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | lồi | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | lõm |

Đồ thị có hai điểm uốn $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ và $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$.

Khi $x \to \pm\infty$ thì $f(x) \to 0$, đường $y = 0$ là tiệm cận ngang.

Đồ thị của hàm có dạng hình chuông. Hàm này có nhiều ứng dụng trong lý thuyết xác suất.

***Thí dụ 2:*** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = (5-x)\sqrt[3]{x^2}$

1. Hàm xác định với mọi $x$.

2. $f'(x) = -\sqrt[3]{x^2} + (5-x)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5(2-x)}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) = 0$ khi $x = 2$, ngoài ra đạo hàm không tồn tại khi $x = 0$. Ta lập bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | $-$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | |
| f | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $3\sqrt[3]{4}$ | ↘ | $-\infty$ |

Tại $x = 0$ hàm có cực tiểu $f(0) = 0$; tại $x = 2$ hàm có cực đại $f(2) = 3\sqrt[3]{4}$.

Ta chú ý rằng tại $x = 0$ hàm có tiếp tuyến thẳng đứng (đạo hàm vô cực); tại $x = 2$ hàm có tiếp tuyến nằm ngang (đạo hàm triệt tiêu).

3. Ta không khảo sát tính lồi, lõm.

4. Hàm có nhánh vô tận nhưng không có tiệm cận là đường thẳng. Đồ thị cắt trục Ox tại $x = 5$.

# BÀI TẬP

7.1. Tính các đạo hàm của hàm số sau:

1) $y=(3x^2+5x-1)^4$;

2) $y=\sqrt{5x^2-3x}$;

3) $y=\dfrac{1}{3x^4-2x^2+1}$;

4) $y=\sin\dfrac{1}{x^2}$;

5) $y=\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}$;

6) $y=tg\sqrt{1-4x^2}$;

7) $y=\sin^2 x-tg^2 2x$;

8) $y=\sin^2[(x-1)\sqrt{x}]$;

7.2. Tính các đạo hàm của hàm số:

1) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}$

2) $y=\dfrac{\arccos x}{x}$

3) $y=arctg^2\dfrac{1}{x}$;

4) $y=arctg\dfrac{x+1}{x-1}$;

5) $y=arctg\dfrac{\ln x}{3}$;

6) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$

7.3. Tính các đạo hàm của:

1) $y = \ln^2 x$

2) $y=\ln \sin x$

3) $y=x^2\log_3 x$;

4) $y=\ln(1-2x)$;

5) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;

6) $y=ae^{-b^2x}$;

7) $y=e^{-\alpha^2\ln x}$;

8) $y=Ae^{-k^2x}\sin(\omega x+\varphi)$;

7.4. Với giá trị nào của $a$ thì hai đường $y=ax^2$ và $y=\ln x$ sẽ tiếp xúc với nhau?

7.5. Radium bị phân huỷ theo công thức $m(t)=Ce^{-kt}$, trong đó $m(t)$ là khối lượng radium hiện có ở lúc $t$; $C,k$ là các hằng số. Có 1g radium để phân huỷ, sau 1 triệu năm nó còn 0,1g. Tính tốc độ phân huỷ.

7.6. Cường độ dòng điện không đổi là điện lượng đi qua thiết diện của dây dẫn trong một đơn vị thời gian. Hãy cho định nghĩa của cường độ dòng điện biến đổi. Áp dụng: điện lượng đi qua dây dẫn tính từ lúc $t=0$ được cho bởi công thức $Q=2t^2+3t+1$ (cu-lông). Tính cường độ dòng điện ssau 5 giây.

7.7. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0$ thì:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$$

7.8. Tính đạo hàm của hàm $y=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ rồi so sánh với đạo hàm hàm $z=\arcsin x$. Từ đó suy ra mối liên hệ giữa $y$ và $z$.

7.9. Tính các tổng

1) $P_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

2) $S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$

3) $C_n = \cos x + 2\cos 2x + ... + n\cos nx$

7.10. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm:

1) $y = xe^{-x^2}$

2) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

3) $y = (1+x^2)arctgx$;

4) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

7.11. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm:

1) $y = e^{-x}$

2) $y = \sin ax + \cos ax$

3) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

7.12. Cho hàm số $y = x^3 - x$. Tính $\Delta y$ và $dy$ tại $x = 2$ khi lần lượt cho $\Delta x$ các giá trị 1; 0,1; 0,01. Tính các giá trị tương ứng của tỷ số $R = \left|\dfrac{\Delta y - y}{\Delta y}\right|$.

7.13. Tìm vi phân của các hàm số:

1) $y = 3x^2$;  2) $y = \sqrt{1-x^2}$;  3) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$;  4) $y = \ln tg\dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{4}$;

7.14. Tính gần đúng:  1) $\sqrt[3]{0,95}$;  2) $\cos 60^0 06'$;  3) $arctg 0,98$;

7.15. Dùng quy tắc Lopitan tính các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 \ln x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\ln x}$;

7.16. Tìm cực trị của hàm số:

1) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;  2) $y = x\sqrt{1-x^2}$;  3) $y = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}}$;

7.17. Tìm các giá trị a và b để hàm:

$y = a\ln x + bx^2 + x$ có cực trị tại $x_1 = 1, x_2 = 2$.

7.18. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

1) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$;  2) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;  3) $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$;

# CHƯƠNG 8

# PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

## §1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

### 1.1. ĐỊNH NGHĨA

Một hàm số thực của n biến số thực là một ánh xạ từ tập hợp $R^n$ (tập hợp các bộ n số thực) vào tập số thực R.

Nói cách khác, *với mỗi bộ n số thực* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ *ta có tương ứng một số thực* $u \in R$ *theo một quy tắc f nào đó. Phần tử* $u \in R$*, ảnh của phần tử* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ *qua ánh xạ f sẽ được kí hiệu là* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Để cho tiện ta dùng ngay kí hiệu trên để chỉ hàm n biến và cần hiểu là:
Hàm n biến:

$$f : R^n \to R$$
$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

***Thí dụ 1***. Cho hàm hai biến $f : R^2 \to R \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (1.1)

Ta thấy ngay rằng để có $z$ tương ứng với (x, y) theo hàm trên thì các số (x, y) phải thỏa mãn điều kiện

$$a^2 - x^2 - y^2 \ge 0 \quad hay \quad x^2 + y^2 \le a^2$$

Miền chứa điểm (x, y) thỏa mãn điều kiện trên cũng được gọi là miền xác định của hàm, ở đây là miền hình tròn tâm O, bán kính a (kể cả đường biên)

Hàm (1.1) có một hình ảnh hình học là nửa mặt cầu tâm O bán kính a nằm phía trên mặt phẳng xOy.

***Thí dụ 2***. Hàm hai biến $f : R^2 \to R \quad z = ax + by + c$ là hàm bậc nhất đối với hai biến $x$ và $y$. Nó xác định với mọi (x, y) và có hình ảnh hình học là một mặt phẳng trong không gian.

***Chú ý 1***. Nếu ta cho một số biến của hàm nhiều biến các giá trị không đổi thì ta sẽ có hàm với số biến ít hơn. Chẳng hạn với hàm hai biến $z = f(x, y)$ nếu ta cho $y = y_0$ không đổi trong suốt quá trình khảo sát thì ta có hàm của một biến $x$: $z = f(x, y_0)$.

***Chú ý 2.*** Nếu trong hàm hai biến $z = f(x, y)$ ta cho z giá trị không đổi C thì phương trình $f(x, y) = C$ nói chung biểu diễn một đường cong nào đó (là giao tuyến của mặt phẳng $z = C$ với mặt cong $z = f(x, y)$). Trên đường cong này, các giá trị của hàm là như nhau. Ta gọi nó là đường đồng mức của hàm $f$ (với mức C). Biểu diễn một số đường đồng mức trên cùng một hình vẽ ta có một hình ảnh về hàm đang xét. Thí dụ, trên một bản đồ địa lý, các điểm có cùng một độ sâu được nối với nhau bằng các đường đồng mức.

Với hàm ba biến $f(x,y,z)$, các mặt $f(x,y,z)=C$ là các mặt đồng mức. Thí dụ trong vật lý học, nếu hàm f là một hàm thế, cho giá trị của thế năng tại các điểm trong không gian thì mặt đồng mức chính là các mặt đẳng thế.

## 1.2. GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

Ta coi một bộ n số thực $(x_1, x_2,..,x_n)$ như một điểm M trong không gian n chiều $R^n$. Như vậy hàm n biến $u = f(x_1, x_2,..,x_n)$ sẽ được coi như hàm của điểm M: $u = f(M)$.

Ta gọi *khoảng cách* giữa hai điểm $A(a_1, a_2,..,a_n)$ và $M(x_1, x_2,..,x_n)$ là số:

$$d(A,M) = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2}$$

Điểm M dần tới $M_0 : M \to M_0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ ... \\ x_n \to a_n \end{cases}$

**Định nghĩa:**

*1. Hàm $u = f(M)$ có giới hạn là $l$ khi điểm M dần tới điểm A nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước ta tìm được một số $\delta > 0$ sao cho : khi $0 \neq d(A,M) < \delta$ thì $|f(M) - l| < \varepsilon$.*

*Ta viết $\lim\limits_{M \to A} f(M) = l$*

*2. Hàm $u = f(M)$ được gọi là liên tục tại điểm A nếu:*

*a. Nó xác định tại A (tức là giá trị $f(a_1, a_2,.., a_n)$ có)*

*b. $\lim\limits_{M \to A} f(M) = f(A)$*

# §2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

## 2.1. ĐẠO HÀM RIÊNG

Giả sử f là một hàm n biến xác định trong một miền xác định chứa điểm $(x_1, x_2,..,x_n)$. Ta cho số $x_i$ một số gia $\Delta x_i$ còn giữ nguyên các biến khác (coi như hàm chỉ chứa biến $x_i$)

Xét tỷ số

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{f\left(x_1,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n\right) - f\left(x_1,...,x_i,...,x_n\right)}{\Delta x_i}$$

Nếu $\Delta x_i \to 0$ mà tỷ số trên có giới hạn thì giới hạn của nó được gọi là đạo hàm riêng lấy theo biến $x_i$ tại điểm $\left(x_1, x_2, .., x_n\right)$ của hàm $f$.

Ta kí hiệu đạo hàm riêng cuat hàm $f$ lấy theo biến $x_i$ là $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n$ hay $f'_{x_i}\left(x_1, x_2, .., x_n\right)$.

Như vậy muốn tính đạo hàm riêng của một hàm $f$ theo một biến nào đó ta chỉ việc tính đạo hàm của hàm đó theo biến đang xét (coi như hàm một biến), còn các biến khác coi như hằng số.

***Thí dụ 1:*** Tính các đạo hàm riêng của hàm hai biến $f\left(x, y\right) = \frac{y}{x}$.

Ta có $\frac{\partial f}{\partial x} = y\left(\frac{1}{x}\right)'_x = -\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(y\right)'_y = \frac{1}{x}$

***Thí dụ 2:*** $f\left(x, y\right) = x^y$. Khi lấy đạo hàm riêng theo x, coi như hằng số nên áp dụng quy tắc đạo hàm hàm luỹ thừa: $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$. Khi lấy đạo hàm riêng theo y, coi x như hằng số nên áp dụng quy tắc đạo hàm hàm mũ: $\frac{\partial f}{\partial x} = x^y \ln x$.

***Thí dụ 3:*** $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

Nếu đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ thì $r$ là độ dài của véc tơ OM với $M(x, y, z)$; gọi $\alpha, \beta, \gamma$ là các góc tạo bởi véc tơ OM với các trục Ox, Oy, Oz thì:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\alpha; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} = \cos\beta; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\varphi;$$

## 2.2. CÁC ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP HAI

Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng theo x trong một miền D nào đó thì có thể coi $f'_x(x, y)$ là hàm của hai biến $x, y$. Nếu hàm này lại có các đạo hàm riêng thì các đạo hàm riêng của $f'_x$ theo x và theo y được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai:

Đạo hàm riêng cấp hai cả hai lần theo x: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ hay $f''_{xx}$

Đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp, theo x rồi theo y: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ hay $f''_{xy}$

Đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp, theo y rồi theo x: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ hay $f''_{yx}$

Đạo hàm riêng cấp hai cả hai lần theo y: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ hay $f''_{yy}$

Ta thừa nhận rằng: nếu các đạo hàm hỗn hợp cấp hai của hàm $z = f(x, y)$ là liên tục thì chúng bằng nhau: $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$

***Thí dụ:*** Với hàm hai biến $z = x^3 y^2 - 3xy^3 - xy + 1$ ta có:

Các đạo hàm riêng cấp 1: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 3y^3 - y;$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - 9xy^2 - x;$

Các đạo hàm riêng cấp 2:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y - 9y^2 - 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y - 9y^2 - 1$$

Các đạo hàm riêng của các hàm đạo hàm riêng cấp hai (nếu có) được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba. Nếu các đạo hàm riêng là liên tục thì chúng không phụ thuộc thứ tự lấy đạo hàm.

Ta cũng có các kết quả tương tự cho các hàm nhiều biến hơn.

## 2.3. VI PHÂN TOÀN PHẦN

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong một miền nào đó chứa điểm $(x_0, y_0)$. Ta xét số gia toàn phần của hàm tại điểm $(x_0, y_0)$:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Cũng như đối với hàm một biến nếu ta có có thể biểu diễn số gia $\Delta f$ dưới dạng:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad (2.1)$$

Tức là nó gồm hai phần:

+ Thành phần thứ nhất, bậc nhất đối với $\Delta x, \Delta y$ (A, B độc lập với $\Delta x, \Delta y$);

+ Thành phần thứ hai là một vô cùng bé cấp cao hơn $\rho$, tức là $\frac{\alpha(\rho)}{\rho} \to 0$ khi $\rho \to 0$ (cả $\Delta x$ và $\Delta y$ đều tiến về 0).

Khi đó, *thành phần* $A\Delta x + B\Delta y$, *phần chính bậc nhất đối với* $\Delta x, \Delta y$ *của số gia* $\Delta f$ *sẽ được gọi là vi phân toàn phần của hàm* $z = f(x, y)$ *tại điểm* $(x_0, y_0)$. *Nó được kí hiệu* $df(x_0, y_0)$ *hay gọn hơn là* $dz$.

***Thí dụ:*** Tìm vi phân toàn phần của hàm $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

Ta có $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0{}^2 + y_0{}^2) = 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$

Ở đây $\alpha(\rho) = \Delta x^2 + \Delta y^2$ vì $\dfrac{\alpha(\rho)}{\rho} = \dfrac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ khi $\rho \to 0$

$(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$; $\alpha(\rho)$ là vô cùng bé có cấp cao hơn $\rho$

Vậy: $df(x_0, y_0) = 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y$

**Định lý:** Nếu hàm $z = f(x, y)$ có vi phân tại $(x_0, y_0)$ thì nó cũng có các đạo hàm riêng tại $(x_0, y_0)$ và $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A$ và $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B$

Thực vậy, ta cho trong (2.1) $\Delta y = 0$ : $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha(|\Delta x|)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

Khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn cuối cùng bằng không vì $\alpha(|\Delta x|)$ là vô cùng bé cấp cao hơn $\Delta x$. Vậy $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A$. Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B$

Ta thừa nhận kết quả sau:

Ngược lại, *nếu hàm* $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục tại* $(x_0, y_0)$ *thì nó có vi phân tại điểm đó và*

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y \qquad (2.2)$$

Sau này để tính vi phân toàn phần của hàm hai biến ta sẽ dùng công thức (2.2).

Ta thường viết nó dưới dạng thu gọn: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Nếu các biến số x, y của hàm hai biến $z = f(x, y)$ độc lập thì ta cũng có $dx = \Delta x$ và $dy = \Delta y$, khi đó vi phân toàn phần của hàm hai biến còn được viết dưới dạng:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Ta cũng có kết quả tương tự cho hàm số nhiều biến hơn, chẳng hạn với hàm của ba biến số độc lập $u = f(x, y, z)$ ta có vi phân toàn phần của nó:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

***Thí dụ***: Tìm vi phân toàn phần của hàm $u = xyz$ tại điểm $(x, y, z)$.

Ta có $\frac{\partial u}{\partial x} = yz;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy;$

Từ đó: $\quad du = yzdx + zxdy + xydz$

## 2.4. ÁP DỤNG VI PHÂN TOÀN PHẦN VÀO TÍNH GẦN ĐÚNG VÀ ĐÁNH GIÁ SAI SỐ

Từ công thức (2.1) ta thấy rằng khi $\rho$ khá bé tức là $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé ta có công thức tính gần đúng

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \cong f\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\Delta y$$

***Thí dụ:*** Tính gần đúng $1,02^{4,05}$

Xét hàm $z = x^y$ và áp dụng công thức gần đúng trên:

$$\left(x_0 + \Delta x\right)^{y_0 + \Delta y} \cong {x_0}^{y_0} + y_0 {x_0}^{y_0 - 1}\Delta x + {x_0}^{y_0} \ln x_0 \Delta y$$

Cho $x_0 = 1, \Delta x = 0,02, y_0 = 4, \Delta y = 0,05$ ta có

$$1,02^{4,05} \cong 1^4 + 4.1^3 0,02 + 1^4 \ln 0,05 = 1,08$$

Bây giờ xét một áp dụng của vi phân toàn phần vào việc đánh giá sai số

Giả sử ta phải tính giá trị của hàm cho trước $z = f(x, y)$ tại các giá trị của x và y mà ta chỉ biết chúng một cách xấp xỉ. Nói cách khác với giá trị x ta mắc phải sai số $\Delta x$, với y ta mắc phải sai số $\Delta y$, như vậy khi tính z theo các giá trị $x + \Delta x, y + \Delta y$ ta sẽ mắc phải sai số, sai số đó chính là $\Delta z$. Do $\Delta x, \Delta y$ khá bé nên ta có thể thay $\Delta z$ bởi $dz$.

Thông thường sai số $\Delta x$ của giá trị x, về trị tuyệt đối không vượt quá một số dương $\Delta_x$ nào đó, số $\Delta_x$ này được gọi là sai số tuyệt đối của x: $|\Delta x| \le \Delta_x$.

Tương tự $|\Delta y| \le \Delta_y$, với $\Delta_y$ là sai số tuyệt đối cực đại của y.

Từ đó, $|\Delta z| \cong |dz| \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\Delta_y$

Vậy sai số tuyệt đối cực đại của z là: $\Delta_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\Delta_y$

***Chú ý:*** Nhiều khi người ta dùng sai số tương đối cực đại của z, đó là tỷ số:

$\delta_z = \frac{\Delta_z}{|z|}$.

Như vậy, $\delta_z = \left|\frac{\partial z/\partial x}{z}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial z/\partial y}{z}\right|\Delta_y = \left|\frac{\partial \ln|z|}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial \ln|z|}{\partial y}\right|\Delta_y$

*Sai số tương đối cực đại của z bằng sai số tuyệt đối của* $\ln|z|$.

## 2.5. ĐẠO HÀM HÀM SỐ HỢP

Cho hàm số $z = f(x, y)$ có vi phân (khả vi đối với x và y). Giả sử x và y không phải là biến số độc lập mà là hàm của một biến t nào đó: $x = x(t), \quad y = (t)$ với giả thiết chúng là các hàm khả vi đối với t.

Như vậy, về thực chất hàm $z = f(x, y)$ là hàm của biến số t, và ta muốn tính đạo hàm của nó theo t.

Vì hàm f có vi phân nên ta có thể viết: $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\rho)$

Từ đó: $\dfrac{\Delta f}{\Delta t} = A\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + B\dfrac{\Delta y}{\Delta t} + \dfrac{\alpha(\rho)}{\Delta t}$. $A, B$ độc lập với $\Delta x, \Delta y$ nên cũng độc lập với $\Delta t$ nên khi $\Delta t \to 0$ thì: $A\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to A\dfrac{dx}{dt}, B\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \to B\dfrac{dy}{dt}$

Mặt khác, $\dfrac{\Delta(\rho)}{\Delta t} = \dfrac{\alpha(\rho)}{\rho} \cdot \dfrac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \dfrac{\alpha(\rho)}{\rho} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$

Các hàm $x(t), y(t)$ khả vi nên liên tục, vì vậy, khi $\Delta t \to 0$ thì cả $\Delta x, \Delta y \to 0$ tức là $\rho \to 0$. Theo định nghĩa của vi phân $\dfrac{\alpha(\rho)}{\rho} \to 0$ khi $\rho \to 0$. Vì vậy:

Khi $\Delta t \to 0$: $\dfrac{\alpha(\rho)}{\rho} \to 0 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = 0$

vậy $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta t} = A \cdot \dfrac{dx}{dt} + B \cdot \dfrac{dy}{dt}$ *hay* $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

Ta có thể mở rộng kết quả trên cho trường hợp hàm hợp của hai biến:

$z = f(x, y)$ với $x = x(u, v); \quad y = y(u, v)$

Khi đó nếu hàm z là khả vi đối với x, y; các hàm x, y khả vi đối với u, v thì hàm hợp $z = f\left[x(u, v), y = y(u, v)\right]$ cũng khả vi đối với u, v và ta có:

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du}$$

$$\frac{df}{dv} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv}$$

***Thí dụ 1***: $z = e^{x^2 + y^2} \quad x = a\cos t, y = b\sin t$

Ta có: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^{x^2 + y^2}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\mathrm{e}^{x^2 + y^2}; \dfrac{dx}{dt} = -a\sin t; \dfrac{dy}{dt} = b\mathrm{cost}$

từ đó:

$\dfrac{dz}{dt} = 2\mathrm{e}^{x^2 + y^2}\left(-ax\sin t + by\mathrm{cost}\right) = \mathrm{e}^{x^2 + y^2}\sin 2t(b^2 - a^2)$

***Thí dụ 2:*** $z = x^2 + y^2$ trong đó $x = u + v; y = u - v$

Khi đó:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du} = 2x + 2y = 4u$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} = 2x - 2y = 4v$$

## §3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

### 3.1. ĐỊNH NGHĨA

*Hàm n biến* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *có cực đại tại* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *trong một miền D nếu với mọi điểm* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *thuộc một lân cận đủ nhỏ của điểm* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^{(*)}$ *ta có:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$$

*Hàm n biến* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *có cực tiểu tại* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *trong một miền D nếu với mọi điểm* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *thuộc một lân cận đủ nhỏ của điểm* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^{(*)}$ *ta có:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0).$$

***Thí dụ***: Hàm $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ có cực tiểu tại $(0,0)$ vì vậy với mọi x, y ta luôn có: $f(x, y) = x^2 + y^2 \ge 0 = f(0,0)$

### 3.2. ĐIỀU KIỆN CẦN CỦA CỰC TRỊ

*Nếu hàm khả vi* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$*cực trị tại điểm* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *thì các đạo hàm riêng của hàm tại điểm đó triệt tiêu.*

Ta chứng minh cho trường hợp hàm hai biến $z = f(x, y)$. Giả sử nó có cực trị tại điểm $(x_0, y_0)$. Xét hàm một biến $z = f(x, y_0)$, do giả thiết nó có cực trị tại điểm $x = x_0$, theo điều kiện cần của cực trị hàm một biến ta có $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ tại điểm $(x_0, y_0)$.

Tương tự ta có $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ tại điểm $(x_0, y_0)$.

Trong thí dụ ở phần trên ta đã chứng tỏ hàm $z = x^2 + y^2$ có cực tiểu tại (0,0).

Ta có $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0$ tức là các đạo hàm riêng tại điểm cực trị (0,0) triệt tiêu.

Cần chú ý rằng điều kiện các đạo hàm riêng triệt tiêu chỉ là điều kiện cần chứ không phải là đủ.

chẳng hạn hàm $z = x^2 - y^2$ có các đạo hàm riêng triệt tiêu tại (0,0), nhưng tại đó nó không có cực trị. Ta có $f(0,0) = 0$. Nếu ta lấy các điểm $(x, y)$ thuộc lân cận điểm $(0,0)$ mà $x > y$ thì $f(x, y) > 0$ còn nếu lấy các điểm $(x, y)$mà $x < y$ thì $f(x, y) < 0$ (hình 30)

Hàm không thỏa mãn định nghĩa của cực trị tại điểm $(0,0)$. Điều kiện đủ của cực trị hàm nhiều biến khá phức tạp. Ta phát biểu ở đây mà không chứng minh.

**Điều kiện đủ của cực trị hàm hai biến:**

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của nó trong một miền chứa điểm $(x_0, y_0)$. Tại $(x_0, y_0)$ các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu. Ký hiệu các đạo hàm riêng cấp hai tại $(x_0, y_0)$ là:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0)}\;;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}\;;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0)}$$

*Nếu $AC-B^2>0$ hàm $f(x,y)$ có cực trị tại điểm $(x_0,y_0)$. Cực trị đó là cực đại nếu $A<0$; là cực tiểu nếu $A>0$.*

*Nếu $AC-B^2<0$ hàm $f(x,y)$ không có cực trị tại điểm $(x_0,y_0)$.*

*Nếu $AC-B^2=0$, ta không kết luận được. Nói cách khác, tiêu chuẩn này không có hiệu lực ta phải dùng các tiêu chuẩn khác hoặc dùng định nghĩa cực trị để khảo sát.*

***Thí dụ:*** Tìm các điểm cực trị của hàm $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$

Cho các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu ta được hệ $\begin{cases}6x^2+y^2+10x=0\\ 2xy+2y=0\end{cases}$

Từ phương trình hai ta được $x=-1$ hoặc $y=0$. Thay vào phương trình đầu, ta tìm được bốn điểm $M_1(0,0), M_2\left(-\frac{5}{3},0\right), M_3(-1,2), M_4(-1,-2)$ .

Ta tính các đạo hàm riêng cấp hai: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x+10;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x+2$

Tại $M_1: A=10; B=0; C=2, AC-B^2>0, A>0$: hàm có cực tiểu.

Tại $M_2: A=-20; B=0; C=-\frac{4}{3}, AC-B^2>0, A<0$: hàm có cực đại

Tại $M_3: A=-2; B=4; C=0, AC-B^2<0$: hàm không có cực trị

Tại $M_4: A=-2; B=-4; C=0, AC-B^2<0$: hàm không có cực trị

***Chú ý:*** trong nhiều trường hợp đặc biệt là trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, nếu ta biết rằng bài toán đang xét chắc chắn có cực trị mà ta chỉ tìm được một điểm tại đó có các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu thì sử dụng điều kiện cần của cực trị ta có thể kết luận điểm ta tìm được là điểm cực trị tránh phải dùng điều kiện đủ của cực trị vì nó khá phức tạp.

## BÀI TẬP

8.1. Tìm miền xác định của các hàm sau:

$$z = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; \quad z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

$$z = \ln\left(-\frac{x}{y}\right); \quad u = \sqrt{x + y + z}$$

8.2. Tìm các đường đồng mức của các hàm

$$1)\ z = 2x + y; \quad 2)\ z = \frac{x}{y}; \quad 3)\ z = \frac{\sqrt{x}}{y}$$

8.3. Cho hàm số

1) $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$; tính $f'_x(2,1)$ $f'_y(2,1)$

2) $z = e^{x^2+y^2}$. Tính $z'_x, z'_y$

8.4. Chứng tỏ rằng hàm $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

8.5. cho $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Tìm $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$

8.6. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

2) $u = e^x(\cos y + x\sin y)$

3) $u = x^{y^2 z}$

8.7. Chứng tỏ rằng nếu biểu thức $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó thì ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

8.8. Tính gần đúng:

$$1)\ \text{arctg}\frac{1,02}{0,95}; \quad 2)\ \sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}; \quad 3)\ \sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}}$$

8.9.

1) Cho hàm $z = y\ln x$. Tìm $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$

2) Cho hàm $z = \ln tg\left(\frac{y}{x}\right)$. Tìm $z''_{xy}$

8.10. Cho hàm

1) $z = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$ với $u = tg^2 x, v = \cot g^2 x$. Tìm $z'_x$

2) $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$ với $y = 3x + 1$. Tìm $\frac{dz}{dx}$

8.11. Cho hàm $u = \frac{1}{r}$ với $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . chứng tỏ rằng: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

8.12. Đạo hàm theo hướng. Người ta định nghĩa đạo hàm của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $M(x, y)$ theo hướng véc tơ $l = \overline{MM_1}$ với $M_1(x_1, y_1)$ là giới hạn (nếu có) của tỷ số:

$\frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|}$ khi $|MM_1| \to 0$; ký hiệu đạo hàm theo hướng $l$ là $\frac{\partial z}{\partial l}$. Như vậy, nếu đặt $\Delta z = f(M_1) - f(M); x_1 = x + \Delta x, y_1 = y + \Delta y, \rho = |MM_1|$ thì $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ và $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}$. Dùng công thức $\Delta z = dz + \alpha(\rho), \alpha \to 0$ khi $\rho \to 0$. Chứng minh rằng nếu hàm z khả vi thì đạo hàm của nó theo hướng $l(\cos x , \sin x)$ sẽ là:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$$

từ đó hãy tìm hướng mà theo đó đạo hàm theo hướng có giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

8.13. Tìm các cực trị của các hàm

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

2) $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$

8.14. Chứng minh rằng trong số các hình chữ nhật có tổng ba kích thước không đổi thì hình lập phương có thể tích lớn nhất.

8.15. **Cực trị có điều kiện.** Cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện giữa x và y thỏa mãn hệ thức $\varphi(x, y) = 0$ được gọi là cực trị có điều kiện. Cách tìm cực trị có điều kiện: Xét hàm $z = f(x, y)$ với $\varphi(x, y) = 0$. Có thể coi y là hàm của x: $y = y(x)$ nên $z = f[x, y(x)]$. Điều kiện cần của cực trị là $\frac{dz}{dx} = 0$ hay

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (a)$$

Ta tính $\frac{dy}{dx}$. Từ $\varphi(x, y) = 0$ có $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$ nên $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$

Thay vào (a) ta có: $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} \quad (b)$

Đặt $\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda$ thì (b) tương đương với $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\varphi'_x = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\varphi'_y = 0$

Vậy để tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta tìm cực trị hàm phụ (được gọi là hàm Lagrange):

$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ với $\lambda$ là một hằng số.

Áp dụng: Tìm cực trị của hàm $z = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$.

*CHƯƠNG 9*

# PHÉP TÍNH NGUYÊN HÀM

## §1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

### 1.1 NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

Trong chương 7, ta đã xét bài toán đạo hàm: Cho hàm số $F(x)$, tìm hàm $f(x)$ là đạo hàm của hàm $F(x)$:

$$f(x) = F'(x)$$

Trong chương này ta xét bài toán ngược lại: Cho hàm $f(x)$, hãy tìm một hàm $F(x)$ sao cho nó có đạo hàm đúng bằng $f(x)$ đã cho:

$$F'(x) = f(x)$$

***Ví dụ:*** Cho $f(x) = \cos x$ thì $F(x) = \sin x$ vì:
$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$

**Định nghĩa:** Hàm $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm $f(x)$ nếu tại mọi $x$ thuộc miền xác định của hàm ta có:

$$F'(x) = f(x)$$

***Ví dụ:*** Nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$, nguyên hàm của $x^n$ là $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Ta đã biết rằng, nếu một hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó là duy nhất. Nhưng nếu một hàm số đã có một nguyên hàm thì nó có vô số nguyên hàm. Thật vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ với $C$ là một hằng số tuỳ ý cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

**Định lý:** *Hai nguyên hàm của cùng một hàm số chỉ sai khác nhau một hằng số.*

Giả sử $F_1(x)$ và $F_2(x)$ cùng là nguyên hàm của hàm $f(x)$

Ta xét hàm $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$

Ta có: $\Phi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

Hàm $\Phi(x)$ có đạo hàm bằng không tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó nên có giá trị không đổi:

$\Phi(x) = C$ hay $F_2'(x) - F_1'(x) = C$

Như vậy để tìm mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ ta chỉ việc tìm một nguyên hàm $F(x)$ của nó rồi thêm hằng số $C$ tuỳ ý. Muốn tìm một nguyên hàm thoả mãn điều kiện nào đó ta tìm tập hợp mọi nguyên hàm rồi xác định hằng số $C$ nhờ điều kiện đã cho.

***Ví dụ:*** Tìm nguyên hàm của hàm $\cos x$ biết nguyên hàm đó bằng $0$ tại $x = \frac{\pi}{2}$.

Tập hợp các nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x + C$

Tại $x = \frac{\pi}{2}$ ta có $\sin\frac{\pi}{2} + C = 0$ hay $1 + C = 0, C = -1$

Vậy nguyên hàm cần tìm là $(\sin x - 1)$

## 1.2 TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Để tìm nguyên hàm của hàm số được thuận lợi, ta đưa vào khái niệm *tích phân bất định.*

Định nghĩa : Tập hợp mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$ và được ký hiệu là: $\int f(x)dx$.

Dấu $\int$ là dấu tích phân, hàm $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân, $dx$ là vi phân của $x$, $x$ chỉ biến số lấy dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì: $\int f(x)dx = F(x) + C$

C là một hằng số tuỳ ý. Ta suy ra các tính chất của tích phân bất định:

*1) Đạo hàm của tích phân bất định bằng hàm số dưới dấu tích phân:*

$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + C]' = f(x)$. Từ đó:

$d\int f(x)dx = f(x)dx$

*Vi phân của tích phân bất định bằng biểu thức dưới dấu tích phân.*

*2) Ta có:* $\int dF(x) = F(x) + C$ *do* $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$

*3) Tích phân bất định của một tổng các hàm số bằng tổng của các tích phân của từng hàm số:* $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

*4) Có thể đưa hằng số không đổi ra ngoài dấu tích phân.*

Nếu $k$ là một hệ số không đổi thì $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Có thể kiểm chứng các tính chất 3, 4 bằng cách chứng tỏ đạo hàm của vế phải và vế trái bằng nhau.

## 1.3 BẢNG CÁC TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

Dựa vào bảng đạo hàm và định nghĩa tích phân bất định ta có :

| | |
|---|---|
| $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ \ \alpha \neq -1$<br>$\int \frac{dx}{x} = \ln\mid x\mid + C$<br>$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$<br>$\int e^x dx = e^x + C$<br>$\int \sin x dx = -\cos x + C$<br>$\int \cos x dx = \sin x + C$ | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$<br>$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + C$<br>$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$<br>$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$<br>$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\mid\frac{a+x}{a-x}\mid + C$<br>$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\mid x + \sqrt{x^2 + a}\mid + C$ |

Để kiểm chứng các công thức trên ta chỉ việc lấy đạo hàm vế phải ta sẽ được hàm dưới dấu tích phân. Chẳng hạn với công thức (12):

$$\left[\ln\mid x + \sqrt{x^2 + a}\mid + C\right]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

Để việc tìm tích phân bất định được nhanh chóng ta cần học thuộc lòng bảng tích phân trên.

## §2. HAI PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

### 2.1 PHÉP ĐỔI BIẾN

Giả sử $F$ là một nguyên hàm của hàm của hàm $f$ và giả sử $x = \varphi(t)$ là một hàm khả vi nào đó. Ta xét hàm hợp: $F(x) = F(\varphi(t))$

Đạo hàm của nó: $\{F[\varphi(t)]\}' = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

Theo định nghĩa tích phân bất định:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx$$

Từ đó ta được công thức đổi biến số trong tích phân bất định:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt} \qquad (1)$$

với $x = \varphi(t)$ là hàm khả vi.

Để đổi biến số trong tích phân ta thay $x = \varphi(t)$ ở hàm dưới dấu tích phân, với $\varphi(t)$ là một hàm khả vi, $dx = \varphi'(t)dt$ sao cho tích phân nhận được, với biến số tích phân là $t$, thuộc loại tích phân trong bảng nêu trên.

***Ví dụ 1:*** $\int \cos(ax+b)dx$. Đặt $t = ax + b$, tức là $x = \dfrac{t-b}{a}, dx = \dfrac{1}{a}dt;$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \cos t dt = \frac{1}{a}\sin t + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

***Ví dụ 2:*** $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Đặt $x = a\sin t, a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t, dx = a\cos t dt;$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos t.a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Để trở lại biến $x$ ta chú ý là: $x = a\sin t \Leftrightarrow \sin t = \dfrac{x}{a} \Leftrightarrow t = \arcsin\dfrac{x}{a}$.

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = 2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

*Chú ý:* Thay đổi vai trò của $t$ và $x$ trong công thức (1) ta được:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(f)dt$$

Nếu ta biến đổi tích phân đã cho ở vế trái về tích phân ở vế phải thì khi đó ta dùng phép đổi biến $t = \varphi(x)$.

***Ví dụ 3:*** $\int tgx dx$

Ta viết $\int tgx dx = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos x}$; đặt $t = \cos x, dt = -\sin x dx$ ta được:

$$\int tgxdx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

***Ví dụ 4:*** $\int xe^{x^2}dx;$

đặt $t = x^2, dt = 2xdx \rightarrow \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

***Ví dụ 5:*** $\int \frac{dx}{x\ln x};$

đặt $t = \ln x, dt = \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$

*Chú ý:* Đặt $t = f(x), dt = f'(x)dx$ ta có:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

***Ví dụ:***

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+5) + C.$$

## 2.2 PHÉP PHÂN ĐOẠN

Giả sử $u$ và $v$ là hai hàm khả vi.

Ta có $(u.v)' = u'v + uv'$

Từ đó: $\int (u'v + uv')dx = uv + C;$ $\int u'vdx + \int uv'dx = uv + C$

Do: $v'dx = dv, u'dx = du$

Nên: $\int udv + \int vdu = uv + C$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \qquad (2)$$

Ta để hằng số C nằm trong tích phân, nó sẽ xuất hiện khi ta tính $\int vdu$

Công thức (2) được gọi là *công thức tính tích phân bằng phân đoạn* hay *lấy tích phân từng phần.*

***Ví dụ 1:*** $\int \ln xdx$

Đặt $u = \ln x, dv = dx$ ta có:

$du = \dfrac{dx}{x}, v = x \to \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$ .

***Ví dụ 2:*** $\int x^2 e^x dx$

Đặt $u = x^2, dv = e^x dx$ ta có $du = 2xdx, v = e^x \to \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$ .

Tiếp tục phân đoạn cho tích phân sau cùng:

Đặt $u = x, dv = e^x dx$ ta có:

$$du = dx, v = e^x \to \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Cuối cùng ta có: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

***Ví dụ 3:*** $\int e^{ax} \cos bx dx$

Đặt:

$$u = e^{ax}, dv = \cos bx dx \text{ th× } du = ae^{ax} dx, v = \frac{1}{b} \sin bx$$

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx$$

Phân đoạn cho tích phân sau:

Đặt $u = e^{\mathrm{ax}}, dv = \sin bx dx$ thì $du = ae^{\mathrm{ax}} dx, v = -\dfrac{1}{b} \cos bx$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I$$

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \left( -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I \right)$$

$$\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) I = \frac{1}{b} e^{ax} \left( \sin bx + \frac{a}{b} \cos bx \right)$$

$$I = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

*Chú ý:* Các tích phân có dạng sau được tính bằng phương pháp phân đoạn, $P(x)$ là hàm đa thức.

1) $\int P(x) \sin ax dx$ $\quad\int P(x) \cos ax dx$ $\quad\int P(x) e^{ax} dx$; cho $u = P(x)$

2) $\int P(x) \arcsin x dx$ $\quad\int P(x) \arccos x dx$ $\quad\int P(x) \ln x dx$; $\quad$ cho $dv = P(x) dx$

## §3. PHÉP TÍNH NGUYÊN HÀM MỘT SỐ HÀM SỐ

### 3.1 NGUYÊN HÀM CỦA HÀM HỮU TỶ

Hàm hữu tỷ là hàm có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là các hàm đa thức.

Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì bằng cách chia đa thức ta được:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

trong đó $A(x)$ là đa thức nguyên, còn $P_1(x)$ là đa thức có bậc bé hơn bậc của $Q(x)$.

Tính nguyên hàm của $A(x)$ không có gì khó khăn, chỉ việc dùng công thức:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

*Để tìm nguyên hàm của phân thức thực sự* $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ *ta* ***phân tích nó thành các phân thức tối giản*** mà ta sẽ trình bày một số trường hợp đơn giản.

1) Nếu $Q(x)$ chỉ có các nghiệm thực và đơn:

$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ thì phân thức $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ được phân tích thành $\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}$ ta tính các hệ số $A_1, A_2, ..., A_n$ bằng cách quy đồng mẫu số ở vế phải rồi đồng nhất các hệ số của đa thức ở hai vế.

2) Nếu $Q(x)$ có chứa một nghiệm thực $b$, bội $k$, trong phân tích của $Q(x)$ có thừa số $(x-b)^k$

Ứng với thừa số đó, trong phân tích của $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ sẽ chứa $k$ phân thức dạng:

$$\frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}} + ... + \frac{B_1}{x-b}$$

3) Nếu khi phân tích $Q(x)$ thành thừa số, nó chứa thừa số dạng $x^2 + px + q$ với $p^2 - 4q < 0$ (tam thức không có nghiệm thực) thì thừa số đó ứng với phân thức: $\frac{\text{Ax+B}}{\text{x}^2 + px + q}$ trong phân tích của $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Việc tính các hệ số $A, B$ hoặc $B_1 \ldots B_k$ cũng được làm như ở phần (1)

Trong các trường hợp nêu trên, việc tính nguyên hàm của phân thức thực sự dẫn tới việc tìm nguyên hàm của các phân thức tối giản có dạng:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{B}{(x-b)^k}, \frac{\text{Ax+B}}{\text{x}^2 + px + q}, p^2 - 4q < 0.$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{B}{(x-b)^k} = \frac{B}{1-k} \frac{1}{(x-b)^{k-1}} + C, k \neq 1;$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$$

Ta xét một số ví dụ sau:

***Ví dụ 1:*** $\int \frac{x-3}{x^3-x} dx$, ta có $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.

$Q(x)$ có 3 nghiệm thực và đơn nên ta phân tích:

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x^3 - x}$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế, ta có:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=3 \\ B=-1 \\ C=-2 \end{matrix}$$

Vậy:

$$\int \frac{x-3}{x^3-x}dx = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x+1} = 3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

***Ví dụ 2:*** $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$

Mẫu số $Q(x)$ có một nghiệm thực, đơn $x=-3$ và nghiệm thực $x=1$ bội 3 nên ta phân tích: $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}$;

Khử mẫu số chung:

$x^2+1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3$

$= (C+D)x^3 + (B-3C-2C-3D)x^2 + (A+2B+C-2D)x +$

$+3A-3B+3C-D$;

Ta có:

$C+D=0;\ B+C-3D=1;$

$A+2B+C-D=0; \Rightarrow A=\frac{1}{2} B=\frac{3}{8} C=\frac{5}{32} D=-\frac{5}{32}$

$3A-3B+3C-D=0.$

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$$

***Ví dụ 3:*** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

Mẫu số $Q(x)$ có chứa thừa số $x^2+1$ không có nghiệm thực nên:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1};\ 1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

Từ đó: $A=1, C=0, A+B=0$ nªn $B=-1$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Ta không xét ở đây trường hợp mẫu số $Q(x)$ có chứa các thừa số $(x^2+px+q)^k$.

Người ta chứng minh được rằng ngay cả trong trường hợp đó vẫn tìm được nguyên hàm của hàm hữu tỷ dưới dạng các hàm số sơ cấp. Như vậy: ***Các hàm số hữu tỷ đều có nguyên hàm dưới dạng hàm sơ cấp.***

Khi phải tìm nguyên hàm của một hàm $f(x)$, nếu ta tìm được phép đổi biến thích hợp đưa $\int f(x)dx$ về dạng $\int R(t)dt$ với $R(t)$ là một hàm hữu tỷ đối với $t$ thì ta coi như tìm được nguyên hàm dưới dạng hàm sơ cấp.

***Ví dụ 4:*** $\int \frac{dx}{\sin x}$

Hàm dưới dấu tích phân không phải là hàm hữu tỷ. Tuy nhiên nếu dùng phép đổi biến $t = tg\frac{x}{2}$ ta có $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, ta có:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

## 3.2 NGUYÊN HÀM MỘT SỐ HÀM VÔ TỶ ĐƠN GIẢN

Nói chung các hàm vô tỷ không có nguyên hàm biểu diễn dưới dạng hàm sơ cấp. Ở đây ta chỉ xét một số trường hợp đơn giản mà ta có thể đưa về hàm hữu tỷ được, hoặc đưa về những tích phân có trong bảng đã lập.

1) *Tích phân có dạng* $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$, trong đó $R(u,v)$ chỉ một biểu thức hữu tỷ đối với $u$ và $v$.

Ta đặt $t^n = ax+b$.

***Ví dụ:*** $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$ đặt $t^3 = x+1$ thì $x = t^3-1, dx = 3t^2dt$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{(t^3-1)3t^2}{t}dt = 3\int (t^4-1)dt = \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^2 + C =$$

$$= \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

2) *Tích phân có chứa* $\sqrt{ax^2+bx+c}$*:* biến đổi biểu thức dưới dấu căn về dạng $\alpha t^2 + \beta$

***Ví dụ 1:***

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$$

***Ví dụ 2:***

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

***Ví dụ 3:***

$$\begin{aligned}
&\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+3-10}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+4x+10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = \\
&= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C
\end{aligned}$$

***Ví dụ 4:*** $\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \int \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx.$

Để tính $I = \int \sqrt{t^2+a^2}dt$ ta dùng phép phân đoạn: đặt $u = \sqrt{t^2+a^2}, dv = dt$ thì $du = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+a^2}}; v = t$

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{t^2+a^2}dt = t\int t^2+a^2 - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+a^2}} = \\
&= t\sqrt{t^2+a^2} - \int \frac{t^2+a^2-a^2}{\sqrt{t^2+a^2}}dt = \\
&= t\sqrt{t^2+a^2} - \int \sqrt{t^2+a^2}dt + a^2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} \\
&2I = t\sqrt{t^2+a^2} + a^2\ln\left|t+\sqrt{t^2+a^2}\right| + C \\
&I = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+a^2}\right| + C
\end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C$$

## 3.3 NGUYÊN HÀM CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

Ta chỉ xét một số trường hợp đơn giản:

1) *Dạng* $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *với* $R$ *là biểu thức hữu tỷ đối với* $\sin x$ *và* $\cos x$.

Đưa về hữu tỷ bằng cách đặt $t = tg\frac{x}{2}$.

Khi đó: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

***Ví dụ:***

$$\int \frac{dx}{\sin x - 4\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - 4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C$$

*2) Dạng* $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *với* $m, n$ *là các số nguyên dương.*

*a) Ít nhất một trong hai số* $m, n$ *lẻ:* $m$ lẻ thế $t = \cos x$;
$n$ lẻ thế $t = \sin x$.

***Ví dụ:***

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = -\int \sin^4 x \cos^2 x d(\cos x) = -\int (1-t^2)t^2 dt =$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{1}{7}t^7 + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

*b) Cả hai số* $m, n$ *đều chẵn.* Ta dùng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

***Ví dụ:***

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

*3) Dạng* $\int \cos mx \cos nx dx; \int \sin mx \cos nx dx; \int \sin mx \sin nx dx$

Ta dùng công thức lượng giác biến đổi tích thành tổng.

***Ví dụ:***

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 6x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Ta đã xét một số phương pháp để tìm nguyên hàm của một hàm số. Ta thừa nhận rằng *mọi hàm liên tục trên một khoảng* $(a,b)$ *đều có nguyên hàm trong khoảng đó.* Tuy nhiên không phải bất cứ hàm liên tục nào cũng có nguyên hàm biểu diễn được dưới dạng hàm sơ cấp. Chẳng hạn các hàm $\frac{\sin x}{x};\frac{\cos x}{x};e^{-x^2};\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$,v,v…không có nguyên hàm biểu diễn bằng hàm sơ cấp. Để tìm nguyên hàm của chúng ta phải dùng các phương pháp khác.

## BÀI TẬP

9.1 Dùng các tính chất và bảng nguyên hàm tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $(x^3+1)^3$ 2. $\dfrac{x^3+3x+1}{x}$ 3. $2e^x-\sqrt[3]{x^2}$ 4. $3^x e^x$

5. $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 6. $\sin^2\dfrac{x}{2}$ 7. $\dfrac{1}{1+\cos 2x}$

9.2 Dùng các phép thế (đổi biến) đơn giản tính các tích phân bất định sau :

1. $\int \cos(ax+b)dx$ 2. $\int e^{-\frac{x}{2}}dx$ 3. $\int \dfrac{dx}{2-x}$

4. $\int \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$

5. $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$ 6. $\int \cot gxdx$ 7. $x\sqrt{x^2-1}dx$ 8. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

9.3 Tính bằng phép thế:

1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+1}$ 2. $\int x\sqrt{x+1}dx$ 3. $\dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ 4. $\int \dfrac{dx}{e^x-1}$

5. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 6. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ 7. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 8. $\int \dfrac{dx}{\cos x}$

9.4 Tính bằng phép phân đoạn:

1. $\int xarctgxdx$ 2. $\int x\ln xdx$ 3. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

4. $\int x^2\sin xdx$ 5. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$ 6. $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

9.5 Cho $I_n=\int \cos^n xdx$ . Lập công thức liên hệ giữa $I_n$ và $I_{n-2}$

9.6 Tìm nguyên hàm các hàm hữu tỷ:

1. $\dfrac{x^4+2x^2}{x^2+1}$ 2. $\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ 3. $\dfrac{x^2}{x^2+4x+5}$ 4. $\dfrac{x}{x^3-8}$

5. $\dfrac{x^3+x+1}{x^4-81}$ 6. $\dfrac{1}{(x^2-2x)^2}$ 7. $\dfrac{1}{x^4+1}$

9.7 Chứng minh rằng có thể tính $I_n=\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ theo công thức:

$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$. Áp dụng tính $I_3$

9.8 Tính $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)} dx$

9.9 Tìm nguyên hàm các hàm vô tỷ.

1. $\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 2. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}$ 3. $\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ 4. $\sqrt{x^2+x+1}$

5. $\frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ 6. $\frac{1}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$

9.10 Tìm nguyên hàm của các hàm lượng giác:

1. $\sin^3 x$ 2. $\sin^2 x \cos^2 x$ 3. $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ 4. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

5. $\frac{1}{\cos^4 x}$ 6. $\sin x \sin 3x$ 7. $\frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

8. $\frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x}$ 9. $\cos x \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4}$

9.11 Tính hai tích phân:

$$A = \int \frac{\cos x dx}{\cos x + \sin x}$$

$$B = \int \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$$

9.12 Tính các tích phân:

1. $\int tg^3 x dx$ 2. $\int x^3(1-x^2)^{\frac{5}{2}} dx$ 3. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$

# CHƯƠNG 10
# TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

## §1. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG, ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN
### 1.1. BÀI TOÁN DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

Việc tính diện tích một hình phẳng dựa trên nguyên tắc sau:

a) *Diện tích có tính không âm: $A$ là một hình phẳng thì diện tích của $A \geq 0$.*

b) *Diện tích có tính cộng được: nếu $A,B$ là hai hình không có phần chung $(A \cap B = \phi)$ thì: Diện tích $(A \cup B)$= Diện tích $(A)$ + Diện tích $(B)$*

c) *Hình vuông có cạnh bằng 1 thì có diện tích bằng 1.*

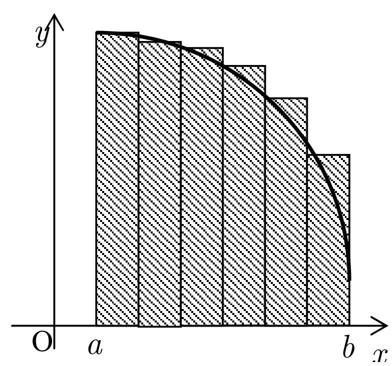
Như vậy để tính diện tích một hình phẳng bất kỳ, ta có thể chia hình đó thành nhiều hình vuông và các hình đặc biệt là các tam giác cong hoặc hình thang cong. Vì tam giác cong chỉ là một trường hợp đặc biệt của hình thang cong, nên ta đặt vấn đề tìm diện tích hình thang cong.

***Hình thang cong:***

Trong hệ tọa độ vuông góc $xOy$, ta xét một hình giới hạn bởi đường cong liên tục $y = f(x)$, trục $Ox$, các đường thẳng $x = a, x = b$ (ta giả thiết $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$).

Trường hợp đặc biệt, đường cong $y = f(x)$ có thể cắt trục $Ox$ tại $x = a$ hoặc $x = b$.

Một hình như vậy được gọi là một hình thang cong.




***Hình 32***

***Diện tích hình thang cong:***

Để tính diện tích hình thang cong ta làm như sau: chia hình thang cong đó thành $n$ dải con (hình 32), coi mỗi dải con có diện tích xấp xỉ diện tích một hình chữ nhật. Như vậy tổng diện tích của $n$ dải hình chữ nhật đó sẽ cho ta một giá trị gần đúng của diện tích hình thang cong.

Cụ thể, ta làm như sau: chia đoạn $[a,b]$ thành $n$ đoạn con bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài $\triangle x = \dfrac{b-a}{n}$, ta có các điểm chia:

$$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + \triangle x, \ldots,\ x_n = x_0 + n.\triangle x = b$$

Trong mỗi đoạn con thứ $i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ta chọn một điểm tùy ý $\xi_i$. Tích $f(\xi_i).\triangle x$ cho ta diện tích hình chữ nhật có các cạnh là $f(\xi_i)$ và $\triangle x$, và ta coi nó xấp xỉ với diện tích dải con thứ $i$. Như vậy tổng:

$$f(\xi_1).\triangle x + f(\xi_2).\triangle x + \cdots + f(\xi_n).\triangle x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\triangle x$$

của $n$ diện tích hình chữ nhật sẽ cho ta giá trị gần đúng của diện tích hình thang cong. Ta thấy rằng nếu $n$ khá lớn, tức là $\triangle x$ khá bé thì kết quả càng chính xác. Vì vậy:

*Nếu tổng trên có giới hạn khi $\triangle x \to 0$ thì giới hạn đó được gọi là diện tích $S$ của hình thang cong đã cho.*

$$S = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\triangle x \qquad (1.1)$$

Ta thừa nhận rằng, nếu hàm $f$ liên tục trên $[a,b]$ thì giới hạn trên tồn tại, tức là hình thang cong đã xét có diện tích.

***Ví dụ:*** Tính diện tích của hình giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$, trục $Ox$, các đường $x = 0, x = 1$.

Chia đoạn $[0,1]$ ra làm $n$ đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia:

$$x_i = \frac{i}{n},\ i = \overline{1,n}$$

Chọn điểm chia $\xi_i$ là điểm mút phải của mỗi đoạn $\xi_i = \frac{i}{n}, i = \overline{1,n}$.

Ta có: $f(\xi_i) = \xi_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$ vµ $\triangle x = \frac{1}{n}$

Nên: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x = \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right).\frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

Ta đã biết: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Từ đó: $\lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$

Vậy diện tích hình phải tìm là $1/3$ đơn vị diện tích.

## 1.2. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm xác định trên $[a,b]$. Ta chia đoạn $[a,b]$ ra làm $n$ đoạn con bởi các điểm chia: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Đặt $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$. Lấy trong mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ một điểm $\xi_i$ tùy ý và lập tổng:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \qquad (1.2)$$

Tổng (1.2) được gọi là ***tổng tích phân*** của hàm $f(x)$ lấy trên đoạn $[a,b]$.

***Định nghĩa:*** *nếu độ dài lớn nhất trong các* $\triangle x_i$ *dần tới* $0$ *mà tổng tích phân (1.2) có giới hạn không phụ thuộc vào cách chia đoạn* $[a,b]$ *thành* $n$ *đoạn con cũng như cách chọn điểm* $\xi_i$ *trong mỗi đoạn con thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm* $f(x)$ *lấy trên đoạn* $[a,b]$.

Tích phân xác định được ký hiệu là: $\int\limits_a^b f(x)dx$

với $\int$ là dấu tích phân, $a$ là cận dưới của tích phân, $b$ là cận trên, $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân (đó là biểu thức vi phân), $x$ là biến số lấy tích phân.

Như vậy theo định nghĩa:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \qquad (1.3)$$

Theo bài toán tính diện tích hình thang cong ở trên thì:

*Nếu* $f(x) \geq 0$ *trên* $[a,b]$ *thì* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *cho ta diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường* $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$. Đó là ***ý nghĩa hình học*** của tích phân xác định.

Hàm $f(x)$ mà với nó giới hạn (1.3) tồn tại được gọi là khả tích trên đoạn $[a,b]$.

Ta thừa nhận định lý sau:

***Định lý:*** *nếu hàm* $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *thì nó khả tích trên đó.*

Tổng quát hơn, nếu hàm $f(x)$ có trong $[a,b]$ một số hữu hạn điểm gián đoạn loại một (ta còn gọi hàm $f$ liên tục từng khúc) thì nó khả tích trên $[a,b]$.

*Chú ý 1:* khi định nghĩa tích phân xác định trên $[a,b]$ ta đã giả thiết $a < b$.

Nếu $a > b$ ta định nghĩa: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

Nếu $a = b$ thì: $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$

*Chú ý 2:* trong tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ thì $x$ là biến số tích phân. Tuy nhiên ta có thể dùng một chữ bất kỳ nào khác để kí hiệu biến số tích phân mà không ảnh hưởng tới giá trị của tích phân. Như vậy ta có thể viết:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

## 1.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Dựa trên định nghĩa của tích phân xác định và các phép tính về giới hạn, ta có thể chứng minh được:

*Nếu các hàm $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì các hàm $f(x)+g(x), k.f(x)$ với $k$ là hằng số cũng khả tích trên $[a,b]$ và:*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

*Nếu hàm $f$ khả tích trên các đoạn $[a,c], [c,b]$ thì nó cũng khả tích trên $[a,b]$ và:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$, $a < b$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$*

Từ tính chất 3 và 1 ta suy ra:

*Nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$*

*Nếu $m$ và $M$ là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm f(x) trên $[a,b]$ thì:*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Thật vậy, ta có $m \leq f(x) \leq M$ nên từ tính chất 4 và 1 suy ra:

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx$$

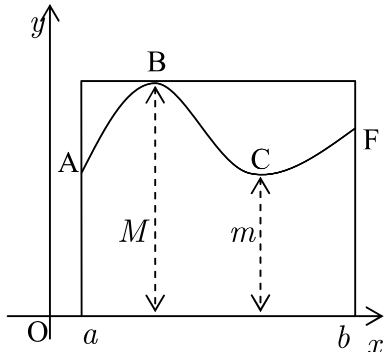
theo định nghĩa tích phân xác định thì: $\int_a^b dx = \lim \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a$ (tổng các đoạn con chính là độ dài đoạn $[a,b]$)

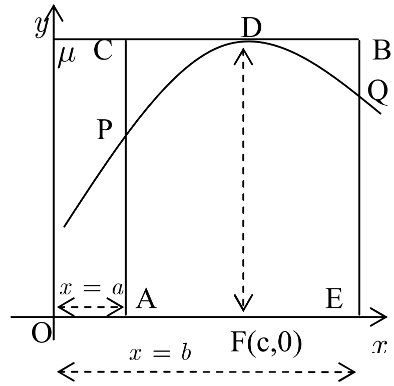
*Về mặt hình học:*

Tính chất 3 nói lên rằng diện tích là một số không âm.

Tính chất 4 nói lên rằng: nếu $f \geq g$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi $f$ sẽ không bé hơn diện tích hình thang cong giới hạn bởi $g$.

Tính chất 5 nói rằng: diện tích hình thang cong kẹp giữa diện tích hình chữ nhật nội tiếp và hình chữ nhật ngoại tiếp (hình 33a).




***Hình 33***

*Định lý về giá trị trung bình:*

*Nếu hàm $f$ liên tục trên $[a,b]$ thì có ít nhất một điểm $c \in [a,b]$ sao cho:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

*Chứng minh:* hàm $f$ có giá trị nhỏ nhất $m$ và $M$ trên $[a,b]$. Theo tính chất 5:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

hay với $a < b$ thì: $\quad m \le \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le M$

Đặt $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ thì $m \le \mu \le M$. Hàm $f$ liên tục trên $[a,b]$ nên nó nhận mọi giá trị giữa $m$ và $M$. Như vậy tồn tại $c \in (a,b)$ để $f(c) = \mu$. Từ đó suy ra công thức phải chứng minh.

*Giá trị $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ được gọi là **giá trị trung bình của hàm** $f$ trên đoạn $[a,b]$.*

***Ý nghĩa hình học:** diện tích hình thang cong bằng diện tích hình chữ nhật có cùng đáy $[a,b]$ với hình thang và đường cao bằng giá trị trung bình của hàm trên đoạn $[a,b]$, tức là $f(c)$ (hình 33b).*

## §2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ NGUYÊN HÀM

Trong chương 9 ta đã đưa ra khái niệm *tích phân bất định* của một hàm $f$ là một tập hợp mọi *nguyên hàm* của hàm số $f$ đó. Trong chương này ta có khái niệm *tích phân xác định* của một hàm $f$ là *giới hạn của tổng tích phân* của hàm

$f$ trên đoạn $[a,b]$, cả hai khái niệm đều có chung một phần tên gọi là tích phân và có chung ký hiệu $\int$. Trong mục này ta sẽ đưa ra mối liên hệ giữa hai khái niệm đó.

## 2.1. ĐẠO HÀM CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH THEO CẬN TRÊN

Xét tích phân $\int_a^x f(t)dt$ có cận trên là $x$. Nếu $x$ biến thiên trong một miền $[a,b]$ thì giá trị của tích phân trên sẽ phụ thuộc vào $x$. Như vậy ta có một hàm:

$x \to \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ xác định trên $[a,b]$.

***Định lý:*** *nếu hàm $f$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì $\Phi'(x) = [\int_a^x f(t)dt]'_x = f(x)$.*

Nói cách khác, *nếu hàm dưới dấu tích phân liên tục trên đoạn lấy tích phân thì đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên bằng hàm số dưới dấu tích phân, trong đó biến số tích phân được thay bằng cận trên.*

*Chứng minh:* ta lập số gia $\triangle\Phi$ của hàm

$$\begin{aligned}\triangle\Phi &= \Phi(x+\triangle x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\triangle x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\triangle x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\triangle x} f(t)dt\end{aligned}$$

Ở đây ta đã dùng tính chất 2 để phân tích tích phân $\int_a^{x+\triangle x} f(t)dt$ thành hai tích phân.

Bây giờ ta áp dụng định lý về giá trị trung bình cho tích phân cuối cùng: do hàm $f$ liên tục nên tồn tại $c \in (x, x+\triangle x)$ tức là $x < c < x+\triangle x$ sao cho:

$$\triangle\Phi(x) = \int_x^{x+\triangle x} f(t)dt = f(c)\triangle x$$

Từ đó $\dfrac{\triangle\Phi}{\triangle x} = f(c)$; khi $\triangle x \to 0$ thì $c \to x$, hàm $f$ liên tục nên $f(c) \to f(x)$.

Vậy: $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle\Phi}{\triangle x} = f(x)$ hay $\Phi'(x) = f(x)$.

Định lý đã được chứng minh.

*Chú ý:* do $\int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt$ nên $[\int_x^b f(t)dt]'_x = -f(x)$.

## 2.2. CÔNG THỨC NEWTON-LEIBNIZ

***Định lý:*** *nếu $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2.1)$$

*giá trị của tích phân xác định của hàm $f$ bằng hiệu các nguyên hàm $F$ của $f$ lấy tại các cận của tích phân.*

*Chứng minh:* Theo định lý ở mục 2.1 thì hàm $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ cũng là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ nên theo tính chất của nguyên hàm thì hai hàm $\Phi(x)$ và $F(x)$ của $f(x)$ chỉ sai khác một hằng số $C$ : $\Phi(x) - F(x) = C$

Cho $x = a$ thì $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$; nên $C = -F(a)$; $\Phi(x) - F(x) = -F(a)$.

Cho $x = b$ thì $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$; nên $\int_a^b f(t)dt - F(b) = -F(a)$

Hay: $$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Viết với biến số $x$ thì $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Định lý được chứng minh.

Công thức (2.1) được gọi là ***công thức Newton-Leibniz***.

Công thức đó có một vai trò quan trọng trong toán học: nó cho phép ta tính được tích phân xác định nhờ nguyên hàm mà không cần phải lấy giới hạn của tổng tích phân.

*Để tính tích phân xác định của hàm $f$ trên $[a,b]$ ta chỉ việc tìm một nguyên hàm $F$ của nó rồi lập hiệu của $F$ tại $b$ và tại $a$:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

***Ví dụ 1:*** ta trở lại bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, trục $Ox$, các đường $x = 0, x = 1$ đã nêu ở mục 1.1. Ta có:

$$S = \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

***Ví dụ 2:*** tìm giá trị trung bình của hàm $f(x) = \sin x$ trên đoạn $[0,\pi]$.

Theo định lý về giá trị trung bình (tính chất 6, 1.3) thì:

$$f(c)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi}$$

## §3. HAI PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Theo công thức Newton-Leibniz, việc tính tích phân xác định đưa đến việc tìm nguyên hàm. Vì vậy ta có thể sử dụng các phương pháp đã biết ở chương 9 để tìm nguyên hàm, cụ thể là các phương pháp biến đổi biến số và phân đoạn. Ở đây ta sẽ trình bày cách áp dụng các phương pháp đó vào tích phân xác định.

### 3.1. PHÉP BIẾN ĐỔI TRONG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

*Nếu $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[a,b]$, $x=\varphi(t)$ là một hàm xác định và có đạo hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$ với $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ thì:*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt \qquad (3.1)$$

Thật vậy, nếu $F$ là nguyên hàm của $f$ thì: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Theo công thức đổi biến trong tích phân bất định ta có:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$$

nên: $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$

Từ đó suy ra công thức (3.1).

Như vậy, khi thực hiện phép đổi biến trong tích phân xác định, đồng thời với việc biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân ta biến đổi các cận lấy tích phân theo biến số mới, sau khi áp dụng công thức Newton-Leibniz ta được ngay giá trị của tích phân mà không phải trở về biến cũ nữa.

***Ví dụ 1:*** tính $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$

Phép đổi biến $x=a\sin x$ thỏa mãn các điều kiện của quy tắc đổi biến đã nêu trên đoạn $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có: $a^2-x^2=a^2(1-\sin^2 t)=a^2\cos^2 t, dx=a\cos tdt$. Nếu $x=0$ thì $t=0; x=a$ thì $\sin t=1, t=\frac{\pi}{2}$. Do đó:

$$I=\int_0^{\pi/2} a\cos t.a\cos tdt=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Cũng như trong tích phân bất định, công thức (3.1) cũng được áp dụng toe chiều ngược lại, nghĩa là ta có thể dùng phép thế $t=\varphi(x)$.

***Ví dụ 2:*** tính $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Đặt $t=\cos x$ thì $dt=-\sin x dx$; $x=0$ thì $t=1$; $x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=0$.

$$I=\int\limits_1^0\frac{-dt}{1+t^2}=\int\limits_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

***Tích phân hàm chẵn hay lẻ trên một khoảng đối xứng qua O:***

Giả sử phải tính: $I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx$

Trong đó hàm $f(x)$ là hàm chẵn hoặc lẻ trên $[-a,a]$

$$I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx+\int\limits_0^{a}f(x)dx$$

Ta đổi biến $x=-t$ trong tích phân giữa:

$$\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx=-\int\limits_a^0 f(-t)dt=\int\limits_0^a f(-t)dt=\int\limits_0^a f(-x)dx$$

(ký hiệu lại biến số tích phân ở tích phân thứ ba bằng $x$)

$$I=\int\limits_0^a f(-x)dx+\int\limits_0^a f(x)dx=\int\limits_0^a[f(-x)+f(x)]dx$$

Nếu hàm $f(x)$ là hàm lẻ trên $[-a,a]$ thì $f(-x)=-f(x)$ nên $f(-x)+f(x)=0$. Ta có $I=0$.

Nếu hàm $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-a,a]$ thì $f(-x)=f(x)$ nên $f(-x)+f(x)=2f(x)$. Từ đó:

$$I=2\int\limits_0^a f(x)dx$$

Tóm lại: $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0 & \text{khi } f \text{ lẻ}\\ 2\int\limits_0^a f(x)dx & \text{khi } f \text{ chẵn}\end{cases}$

***Ví dụ:*** $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=0$ vì hàm $\sin x$ là hàm lẻ.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx = 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

***Tích phân hàm tuần hoàn***

Hàm $f$ xác định trên $R$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T$ nếu $f(x+kT) = f(x)$ với mọi $x \in R$ và $k$ nguyên.

Ta xét: $I = \int_{a}^{a+T} f(x)dx$

Đổi biến $x = z - T$ trong tích phân đầu ở vế phải.

$$\int_{a}^{0} f(x)dx = \int_{a+T}^{T} f(z-T)dz = \int_{a+T}^{T} f(z)dz = -\int_{T}^{a+T} f(x)dx$$

Vậy: $I = -\int_{T}^{a+T} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

Ta có: $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

*Tích phân của hàm tuần hoàn lấy trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ thì không phụ thuộc vào gốc của đoạn lấy tích phân.*

## 3.2. PHÉP PHÂN ĐOẠN TRONG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Nếu $u$ và $v$ là các hàm có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ thì:

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_a^b - \int_{a}^{b} vdu \qquad (3.2)$$

Thật vậy, ta có: $uv\Big|_a^b = \int_{a}^{b} d(uv) = \int_{a}^{b} (vdu + udv) = \int_{a}^{b} vdu + \int_{a}^{b} udv$

Từ đó ta được công thức (3.2).

***Ví dụ 1:*** $I = \int_{1}^{2} \ln x dx$

Đặt $u = \ln x, dv = dx$, ta có: $du = \dfrac{dx}{x}, v = x.$

$$I = x\ln x\Big|_1^2 - \int_{1}^{2} dx = 2\ln 2 - 1$$

***Ví dụ 2:*** lập công thức tính $I_n = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n x dx; n \in N$

Đặt $u = \sin^{n-1} x, dv = \sin x dx$ thì $du = (n-1)\sin^{n-2} x.\cos x dx,\ v = -\cos x$.

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

Thành phần đầu vế phải bằng 0 khi thay $x$ bởi $\pi/2$ và 0, thay $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ trong tích phân vế phải ta được:

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

Từ đó: $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

Hay: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

Ta được công thức truy chứng cho phép tính $I_n$ nếu biết $I_{n-2}$.

Để tính $I_n$ với mọi $n$ ta cần tính $I_0$ và $I_1$ rồi áp dụng công thức trên.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}; \qquad I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$$

Như vậy ta sẽ tính được $I_n$ với mọi $n$ nguyên dương, chẳng hạn:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4};$$
$$I_2 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{4};$$
$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.I_0 = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí và các tác giả khác, *Toán cao cấp*, Tập 1, 2, 3, NXB Giáo dục.

[2] Trần Trọng Huệ, *Đại số tuyến tính và hình giải tích*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.

[3] Trần Đức Long và các tác giả khác, *Giáo trình giải tích*, Tập I, II, III. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[4] Nguyễn Thừa Hợp, *Giải tích*, Tập I, II, III, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[5] Tống Đình Quỳ, Nguyễn Cảnh Lương, *Giúp ôn tập tốt Toán cao cấp - Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục.

[6] Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích*, Tập I, II. NXB Giáo dục.

[7] Nguyễn Đình Trí, *Bài tập toán cao cấp,* Tập 1, 2, 3, NXB Giáo dục, 1999.

[8] Lê Văn Tiến. *Giáo trình toán cao cấp*. NXB Nông Nghiệp, Hà nội, 1998.